セ ン タ ー 模 擬 試 験

夏 講　数学　ⅡB

解説と解答

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア	0	2	
	イ	0	2	
	ウ，エオ，カ	4，33，8	3	
	キク，ケ	−2，3	3	
	コ	3	2	
	サ	8	2	
	シス，セ	−1，1	2	
	ソ，タ	1，2	2	
	$\frac{チ}{ツ}$，テ	$\frac{1}{2}$，1	2	
	$\frac{\pi}{ト}$	$\frac{\pi}{6}$	2	
	$\frac{ナ}{ニ}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	2	
	ヌネ	−1	1	
	$\frac{ノハ}{ヒ}$	$\frac{-3}{4}$	3	
	$\frac{フ}{ヘ}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	ア，イ	3，3	3	
	ウエ	−1	1	
	オ	3	2	
	カ	1	1	
	キク	−1	2	
	ケ，コ	1，2	3	
	サ，シ	3，3	2	
	ス，セ	2，1	2	
	ソタ，チ，ツ	−2，6，5	3	
	テト	−5	2	
	ナ	3	2	
	ニヌ	−2	3	
	$\frac{ネノ}{ハ}$	$\frac{27}{4}$	4	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア	2	1	
	イ	3	1	
	ウ，エ	3，1	2	
	オ，カ	3，1	2	
	キ，ク，ケ	3，6，1	2	
	コ	4	2	
	$\frac{サシ}{ス}$	$\frac{-1}{4}$	2	
	セ	2	1	
	ソ	2	1	
	タ	5	1	
	チ	1	2	
	ツ	5	2	
	テト	14	1	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第4問	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{4}$	2	
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{2}{3}$	2	
	オ	3	2	
	$\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\frac{3}{4}$	2	
	$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\frac{4}{9}$	2	
	$\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$	$\frac{2}{3}$	2	
	シ	0	2	
	$\frac{\text{スセ}}{\text{ソタ}}$	$\frac{17}{18}$	2	
	$\sqrt{\text{チ}}$	$\sqrt{3}$	2	
	ツ	2	2	
		第4問　自己採点小計	(20)	
第5問	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{4}$	1	
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{1}{4}$	1	
	$\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\frac{1}{2}$	1	
	$\frac{\text{キ}}{\text{クケ}}$	$\frac{7}{64}$	2	
	$\frac{\text{コ}}{\text{サシ}}$	$\frac{1}{16}$	2	
	$\frac{\text{スセ}}{\text{ソ}}$	$\frac{11}{4}$	2	
	$\frac{\text{タチ}}{\text{ツテ}}$	$\frac{27}{16}$	2	
	ト	0	1	
	ナ	1	2	
	$\frac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}$	$\frac{33}{4}$	3	
	$\frac{\text{ノハ}}{\text{ヒフ}}$	$\frac{81}{16}$	3	
		第5問　自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

〔１〕 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=2^{2x+2}-2^{x+5}-2^{x}+8$$

とする．

(1) $f(3)=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $2^x=t$ とおく．x がすべての実数をとって変化するとき，t は $t>$ $\boxed{\text{イ}}$ を満たすすべての実数をとり得る．また，$f(x)$ を t を用いて表すと

$$f(x)=\boxed{\text{ウ}}\,t^2-\boxed{\text{エオ}}\,t+\boxed{\text{カ}}$$

となるから，x の不等式 $f(x)\leqq 0$ を解くと

$$\boxed{\text{キク}}\leqq x\leqq \boxed{\text{ケ}}$$

である．

(3) 二つの曲線

$$C_1 : y=2^x$$
$$C_2 : y=3^{-x+n}$$

を考える．ただし，n は整数である．

$n=1$ のとき，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $\log_6 \boxed{\text{コ}}$ である．

また，C_1 と C_2 の共有点の x 座標を x_1 とするとき，$\boxed{\text{キク}}\leqq x_1\leqq \boxed{\text{ケ}}$ となるような n の値は全部で $\boxed{\text{サ}}$ 個ある．

〔２〕 関数 $g(x)$ を

$$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x-\frac{1}{4}$$

とする．また，以下においては x の値の範囲は $0\leqq x<2\pi$ とする．

(1) $\sin x=u$ とおくと，u のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シス}}\leqq u\leqq \boxed{\text{セ}}$ である．

また，$\cos 2x=\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}\sin^2 x$ であるから，$g(x)$ を u を用いて表すと

$$g(x)=\left(u-\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)^2-\boxed{\text{テ}}$$

となる．よって，$g(x)$ は

$$x=\frac{\pi}{\boxed{\text{ト}}},\quad \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\pi \text{ のとき，最小値 } \boxed{\text{ヌネ}}$$

をとる．

(2) k を実数の定数とし，x の方程式 $g(x)=k$ が異なる 3 個の実数解をもつとする．

このとき，k の値は $\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であり，3 個の解の和は $\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\pi$ である．

【解説】

〔1〕

$$f(x)=2^{2x+2}-2^{x+5}-2^x+8.$$

(1) $f(3)=2^8-2^8-2^3+8=\boxed{\ 0\ }$ である．

(2) $2^x=t$ とおく．x がすべての実数をとって変化するとき，t は $t>\boxed{\ 0\ }$ を満たすすべての実数をとり得る．また，$f(x)$ を t を用いて表すと

$$f(x)=2^2\cdot 2^{2x}-2^5\cdot 2^x-2^x+8$$

☜ $2^{2x+2}=2^2\cdot 2^{2x}$，$2^{x+5}=2^5\cdot 2^x$.

$$=4\cdot(2^x)^2-(2^5+1)\cdot 2^x+8$$

☜ $2^{2x}=(2^x)^2$.

$$=\boxed{\ 4\ }t^2-\boxed{\ 33\ }t+\boxed{\ 8\ }$$

となる．よって，$f(x)\leqq 0$ を満たす t の値の範囲は

$$4t^2-33t+8\leqq 0 \quad かつ \quad t>0$$

$$(4t-1)(t-8)\leqq 0 \quad かつ \quad t>0$$

より

$$\frac{1}{4}\leqq t\leqq 8$$

である．したがって，$f(x)\leqq 0$ は

$$\frac{1}{4}\leqq 2^x\leqq 8$$

$$2^{-2}\leqq 2^x\leqq 2^3$$

☜ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$.

となり，さらに底である 2 が 1 より大きいことより，x の不等式 $f(x)\leqq 0$ を解くと

$$\boxed{\ -2\ }\leqq x\leqq \boxed{\ 3\ }$$

☜ $a>1$ のとき $a^M\leqq a^N \iff M\leqq N$.

である．

(3) 二つの曲線

$$C_1: y=2^x$$

$$C_2: y=3^{-x+n}$$

を考える．ただし，n は整数である．

$n=1$ のとき，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$2^x=3^{-x+1}$$

の両辺に 3^x をかけて

$$3^x\cdot 2^x=3^x\cdot 3^{-x+1}$$

$$(3\cdot 2)^x=3^{x+(-x+1)}$$

すなわち

$$6^x=3$$

より，$x=\log_6\boxed{\ 3\ }$ である．また，C_1 と C_2 の共有点の x 座標が x_1 であるから，同様に計算すると

☜ $a>0$，$a\neq 1$，$c>0$，b は実数のとき $a^b=c \iff b=\log_a c$.

$$6^{x_1}=3^n$$

が成り立つから，$-2 \leqq x_1 \leqq 3$ となるような整数 n は

$$6^{-2} \leqq 6^{x_1} \leqq 6^3$$

すなわち

$$\frac{1}{36} \leqq 3^n \leqq 216$$

を満たす．よって，$-2 \leqq x_1 \leqq 3$ となるような整数 n の値は

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

であるから，全部で $\boxed{8}$ 個ある．

☜ 底である 6 は 1 より大きいから

$$-2 \leqq x_1 \leqq 3$$

$$\Longleftrightarrow\ 6^{-2} \leqq 6^{x_1} \leqq 6^3.$$

☜ $3^{-4}=\frac{1}{81}$，$3^{-3}=\frac{1}{27}$，

$3^4=81$，$3^5=243$

より

$$3^{-4}<\frac{1}{36}<3^{-3},\ 3^4<216<3^5.$$

さらに底である 3 は 1 より大きいから，

$-3 \leqq n \leqq 4$.

〔2〕

$$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x-\frac{1}{4}.\quad (0 \leqq x<2\pi)$$

(1) $\sin x=u$ とおくと，$0 \leqq x<2\pi$ より，u のとり得る値の範囲は

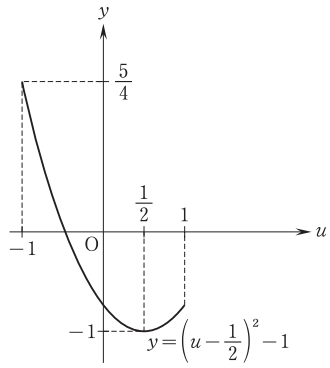
$$\boxed{-1} \leqq u \leqq \boxed{1}$$

である．また，$\cos 2x=\boxed{1}-\boxed{2}\sin^2 x$ であるから，$g(x)$ を u を用いて表すと

☜ **2 倍角の公式**

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=2\cos^2 x-1$$
$$=1-2\sin^2 x.$$

$$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x-\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)-\sin x-\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}(1-2u^2)-u-\frac{1}{4}$$
$$=u^2-u-\frac{3}{4}$$
$$=\left(u-\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)^2-\boxed{1}$$



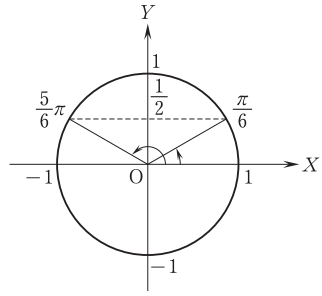
となる．$-1 \leqq u \leqq 1$ より，$g(x)$ は

$$u=\frac{1}{2}\quad \text{すなわち}\quad \sin x=\frac{1}{2}$$

のとき，最小値 -1 をとる．よって，$g(x)$ は

$$x=\frac{\pi}{\boxed{6}},\ \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}}\pi \text{ のとき，最小値 } \boxed{-1}$$

をとる．



(2) k を実数の定数とし，x の方程式

$$g(x)=k \qquad \cdots ①$$

について考える．

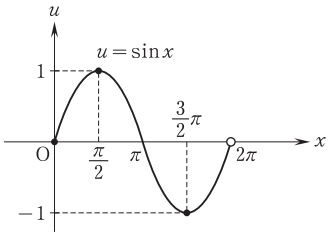
u の値が 1 個決まったとき，$0 \leqq x < 2\pi$ において，$u=\sin x$ を満たす x の値は

$-1<u<1$ のとき，　2 個

$u=\pm 1$ のとき，　1 個

$u<-1$，$1<u$ のとき，0 個

☜



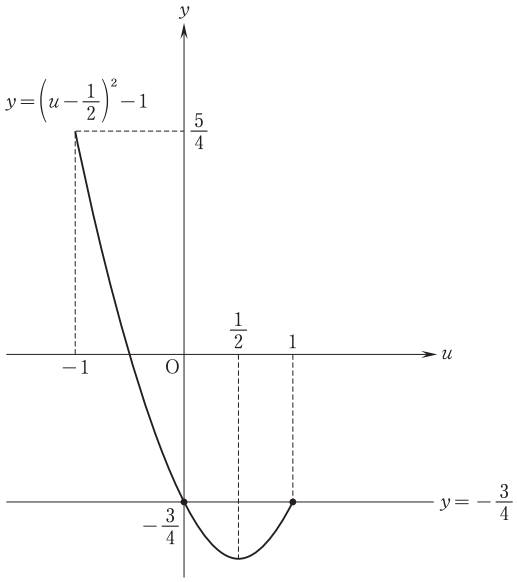
存在する．よって，$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，x の方程式 ① が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，u の方程式

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-1=k \qquad \cdots ②$$

が $-1<u<1$ を満たす解を 1 個と，$u=1$ または $u=-1$ である解を 1 個もつことである．このような実数 k の値は，下のグラフより

$$k=\frac{\boxed{-3}}{\boxed{4}}$$

である．



このとき，u の方程式 ② の解は $u=0$，1 であるから

$$\sin x=0 \quad \text{または} \quad \sin x=1$$

☜ $u=\sin x$.

を満たす x が方程式 ① の解である．よって，$0 \leqq x < 2\pi$ において

$$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$$

であり，3 個の解の和は $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\pi$ である．

第 2 問　微分法・積分法

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3-3x+1$$

とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イ}}$ であるから，$f(x)$ は

$x=\boxed{\text{ウエ}}$ で極大値 $\boxed{\text{オ}}$

$x=\boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$

をとる．

また，x の方程式 $f(x)=0$ は負の解を $\boxed{\text{ケ}}$ 個，正の解を $\boxed{\text{コ}}$ 個もつ．

(2)　曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{サ}}t^2-\boxed{\text{シ}}\right)x-\boxed{\text{ス}}t^3+\boxed{\text{セ}}$$

である．

以下，k を実数とし，ℓ が点 $\mathrm{A}(2,\ k)$ を通るときを考える．このとき

$$k=\boxed{\text{ソタ}}t^3+\boxed{\text{チ}}t^2-\boxed{\text{ツ}}$$

が成り立つことから，点 A から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{テト}}<k<\boxed{\text{ナ}}$$

である．

(3)　曲線 C 上の点 $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キク}}\right)$ における C の接線を ℓ_1 とする．C と ℓ_1 の共有点の x 座標は

$\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{ニヌ}}$ であり，C と ℓ_1 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である．

【解説】

(1)　$f(x)=x^3-3x+1$ より，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

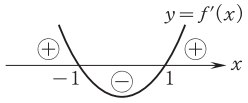
$$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{3}$$
$$=3(x+1)(x-1)$$

である．よって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

☜ **導関数**
$(x^n)'=nx^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
$(c)'=0$　(c は定数)．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

☜　$f'(x)$ の符号は，$y=f'(x)$ のグラフで確認するとよい．



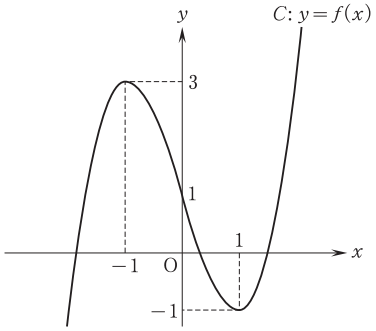
上の表より，$f(x)$ は

$x=\boxed{-1}$ で極大値 $\boxed{3}$

$x=\boxed{1}$ で極小値 $\boxed{-1}$

をとる．

また，曲線 $C: y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



方程式 $f(x)=0$ の実数解は

曲線 $C: y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標

であるから，方程式 $f(x)=0$ は負の解を $\boxed{1}$ 個，正の解を ☜ $f(0)=1$ に注意．

$\boxed{2}$ 個もつ．

(2) 曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-(t^3-3t+1)=(3t^2-3)(x-t)$$

☜ **接線の方程式**

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

すなわち

$$y=\left(\boxed{3}t^2-\boxed{3}\right)x-\boxed{2}t^3+\boxed{1}$$

である．ℓ は点 $\mathrm{A}(2,\ k)$ を通るから

$$k=(3t^2-3)\cdot 2-2t^3+1$$

すなわち

$$k=\boxed{-2}t^3+\boxed{6}t^2-\boxed{5}$$

が成り立つ．

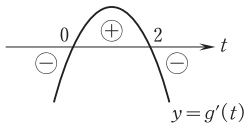
ここで，$g(t)=-2t^3+6t^2-5$ とすると

$$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$$

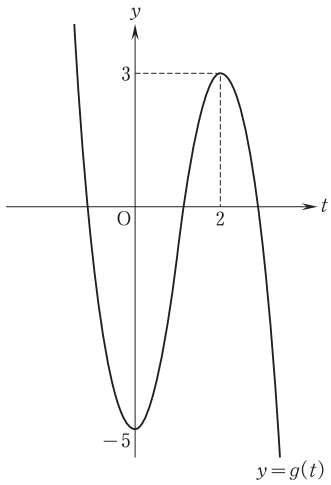
であるから，$g(t)$ の増減は次のようになる．

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	-5	↗	3	↘

☜



よって，$y=g(t)$ のグラフは次のようになる．



点 A から曲線 C に引ける接線の本数は，t の方程式 $k=g(t)$ の異なる実数解の個数に等しい，すなわち，曲線 $y=g(t)$ と直線 $y=k$ の異なる共有点の個数に等しい．これが 3 個となるような k の値の範囲は

$$\boxed{-5}<k<\boxed{3}$$

である．

(3) 曲線 C 上の点 $(1,\ -1)$ における C の接線が ℓ_1 であるから，ℓ_1 の方程式は

$$y=-1$$

☜ $f'(1)=0$ より，ℓ_1 の傾きは 0 である．

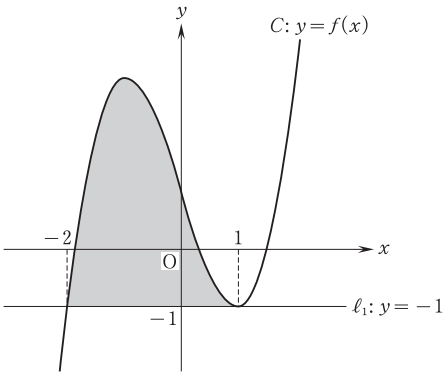
である．また，x の方程式 $f(x)=-1$ を考えると

$$x^3-3x+1=-1$$
$$x^3-3x+2=0$$
$$(x-1)^2(x+2)=0$$

であるから，C と ℓ_1 の共有点の x 座標は

$$1 \text{ と } \boxed{-2}$$

である．よって，C と ℓ_1 で囲まれた図形は，次の図の影の部分である．



したがって，求める面積は

$$\int_{-2}^{1}\{x^3-3x+1-(-1)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

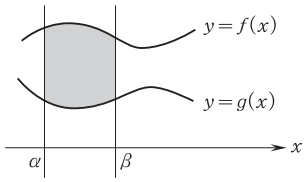
$$=\frac{\boxed{27}}{\boxed{4}}$$

である．

☜ **面積**

区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに $f(x) \geqq g(x)$ ならば二つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および二つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



第3問　数　列

等差数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1+a_2=7 \\ a_3+a_4=19 \end{cases}$$

を満たしている．このとき，初項は $\boxed{\text{ア}}$ であり，公差は $\boxed{\text{イ}}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ウ}}\,n-\boxed{\text{エ}}$$

である．

(1)　自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n}{2}\left(\boxed{\text{オ}}\,n+\boxed{\text{カ}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}=n\left(\boxed{\text{キ}}\,n^2+\boxed{\text{ク}}\,n+\boxed{\text{ケ}}\right)$$

である．

(2)　数列 $\{b_n\}$ は，初項が $\dfrac{15}{4}$ で，漸化式

$$b_{n+1}=2b_n-4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．この漸化式は

$$b_{n+1}-\boxed{\text{コ}}=2\left(b_n-\boxed{\text{コ}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる．ここで，$c_n=b_n-\boxed{\text{コ}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とすると，数列 $\{c_n\}$ は初項が $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，公比が $\boxed{\text{セ}}$ の等比数列である．

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{ソ}}^{\boxed{\text{タ}}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{タ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ．

⓪　n　　①　$n-1$　　②　$n+1$　　③　$n-2$

④　$n+2$　　⑤　$n-3$　　⑥　$n+3$

次に，数列 $\{d_n\}$ は

$$d_n=a_n+b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．

$$d_{n+1}-d_n=b_n-\boxed{\text{チ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから，数列 $\{d_n\}$ の項のうち，最大である項は

$$d_{\boxed{\text{ツ}}}=\boxed{\text{テト}}$$

である．

【解説】

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

である．これにより，条件

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_3 + a_4 = 19 \end{cases}$$

は

$$\begin{cases} a + (a+d) = 7 \\ (a+2d) + (a+3d) = 19 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 2a + d = 7 \\ 2a + 5d = 19 \end{cases}$$

となるので，この連立方程式を解いて

$$a = 2,\ d = 3$$

を得る．よって，初項は $\boxed{2}$ であり，公差は $\boxed{3}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1)\cdot 3 \\ &= \boxed{3}\,n - \boxed{1} \end{aligned}$$

である．

☜ **等差数列の一般項**

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d.$$

(1) 自然数 n について

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n}{2}(2 + 3n - 1) \\ &= \frac{n}{2}\left(\boxed{3}\,n + \boxed{1}\right) \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} (3k-1)(3k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (9k^2 + 3k - 2) \\ &= 9\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k - 2\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2n \\ &= n\left(\boxed{3}\,n^2 + \boxed{6}\,n + \boxed{1}\right) \end{aligned}$$

である．

☜ **等差数列の和**

初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は

$$\frac{n}{2}(a + \ell).$$

☜ $a_n = 3n - 1$ より

$a_k = 3k - 1$,

$a_{k+1} = 3(k+1) - 1 = 3k + 2$.

☜ **和の公式**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

(2) 数列 $\{b_n\}$ は，初項が $\dfrac{15}{4}$ で，漸化式

$$b_{n+1} = 2b_n - 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots ①$$

を満たしており，① は

$$b_{n+1}-\boxed{\ 4\ }=2(b_n-4)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\qquad\cdots②$$

☜ $a_{n+1}=pa_n+q\quad(p\neq 1)$ は，$\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を用いて

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

と変形できる．

① は，$p=2$，$q=-4$ の場合であり，$\alpha=2\alpha-4$ より，$\alpha=4$ である．

と変形できる．

ここで，$c_n=b_n-4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とすると，② は

$$c_{n+1}=2c_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となるので，数列 $\{c_n\}$ は初項が $c_1=b_1-4=\dfrac{15}{4}-4=\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}$，

公比が $\boxed{\ 2\ }$ の等比数列である．よって，数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}c_n&=-\frac{1}{4}\cdot 2^{n-1}\\&=-\frac{2^{n-1}}{2^2}\\&=-2^{n-3}\end{aligned}$$

☜ **等比数列の一般項**

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}.$$

である．したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=4+c_n=4-\boxed{\ 2\ }^{n-3}\qquad\cdots③$$

☜ $c_n=b_n-4$.

であり，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$ である．

数列 $\{d_n\}$ は

$$d_n=a_n+b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているから

$$\begin{aligned}d_{n+1}-d_n&=(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)\\&=(a_{n+1}-a_n)+b_{n+1}-b_n\\&=3+(2b_n-4)-b_n\\&=b_n-\boxed{\ 1\ }\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

☜ $a_{n+1}-a_n=3$（公差）．
また ① より，$b_{n+1}=2b_n-4$.

であり，さらに ③ より

$$d_{n+1}-d_n=4-2^{n-3}-1=3-2^{n-3}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．

ここで，数列 $\{d_n\}$ の項のうち，最大である項を求めよう．

まず

$$d_{n+1}-d_n=0\quad\text{すなわち}\quad 3=2^{n-3}$$

を満たす自然数 n は存在しない．

次に

$$d_{n+1}-d_n>0\quad\text{すなわち}\quad 3>2^{n-3}$$

を満たす自然数 n の範囲は $2^1<3<2^2$ より

$$n-3\leqq 1\quad\text{すなわち}\quad n\leqq 4$$

である．同様にして，$d_{n+1}-d_n<0$ を満たす自然数 n の範囲は $n\geqq 5$ であるから

$$\begin{cases}d_n<d_{n+1} & (1\leqq n\leqq 4\text{ のとき})\\ d_n>d_{n+1} & (5\leqq n\text{ のとき})\end{cases}$$

が成り立つ．したがって

$$d_1<d_2<d_3<d_4<d_5>d_6>d_7>\cdots$$

となるので，数列 $\{d_n\}$ の項のうち，最大である項は

$$\begin{aligned} d_{\boxed{5}} &= a_5 + b_5 \\ &= (3 \cdot 5 - 1) + (4 - 2^{5-3}) \\ &= \boxed{14} \end{aligned}$$

である．

第 4 問　ベクトル

OA＝3，OC＝2，∠AOC＝$\frac{\pi}{3}$ である平行四辺形 OABC において，線分 BC を 3:1 に内分する点を D とし，線分 AB を 2:1 に内分する点を E とする．以下，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{OE}=\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$$

であり，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{オ}$ である．

直線 AD と直線 OE の交点を P とする．点 P は直線 AD 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AD}$ と表される．よって

$$\overrightarrow{OP}=\left(1-\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}s\right)\vec{a}+s\vec{c}$$

となる．さらに，点 P は直線 OE 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OE}$ と表される．したがって

$$s=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},\quad t=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

である．

次に，点 P から直線 OC に引いた垂線と直線 OC の交点を H とする．

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{PH}=\boxed{シ}$ であるから

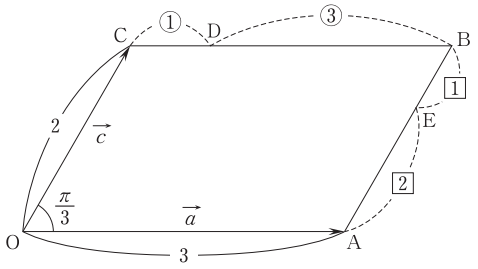
$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタ}}\vec{c}$$

であり，$\left|\overrightarrow{PH}\right|=\sqrt{\boxed{チ}}$ である．

点 P を中心とし，点 H を通る円を K とする．点 B は円 K の $\boxed{ツ}$ にある．$\boxed{ツ}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　内部　　①　周上　　②　外部

【解説】



上の図より

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\vec{a}+\vec{c},$$
☜ $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$.

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\vec{a}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{c}$$
☜ $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$.

である．また

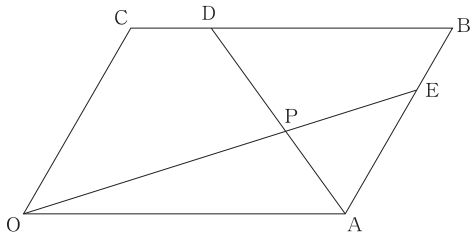
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=3\times2\times\frac{1}{2}$$
$$=\boxed{3}$$

である．

☜ **内積**

$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$



点 P は直線 AD 上にあるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$
$$=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AD}$$
$$=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$$
$$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-s)\vec{a}+s\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{c}\right)$$
☜ $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{c}$.

$$=\left(1-\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}s\right)\vec{a}+s\vec{c}\qquad\cdots①$$

と表される．さらに，点 P は直線 OE 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OE}$$
$$=t\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$
☜ $\overrightarrow{OE}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$.

$$=t\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{c}\qquad\cdots②$$

と表される．$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ と①，②より

$$\begin{cases} 1-\dfrac{3}{4}s=t \\ s=\dfrac{2}{3}t \end{cases}$$

が成り立ち，これを解いて

$$s=\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}},\quad t=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

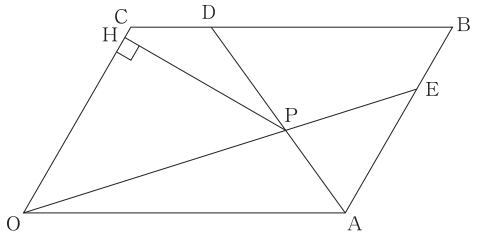
である．$t=\dfrac{2}{3}$ を ② に代入して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c} \qquad \cdots ③$$

と表される．

☞ $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき，実数 x，x'，y，y' に対して

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x'\vec{a}+y'\vec{b} \iff \begin{cases} x=x' \\ y=y'. \end{cases}$$



点 H は直線 OC 上にあるから，実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{c}$ と表される．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=k\vec{c}-\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}\right)\\ &=-\frac{2}{3}\vec{a}+\left(k-\frac{4}{9}\right)\vec{c} \qquad \cdots ④\end{aligned}$$

☞ ③ を代入した．

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\vec{c}\cdot\left\{-\frac{2}{3}\vec{a}+\left(k-\frac{4}{9}\right)\vec{c}\right\}\\ &=-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\left(k-\frac{4}{9}\right)|\vec{c}|^2\\ &=-\frac{2}{3}\times3+\left(k-\frac{4}{9}\right)\times2^2\\ &=4k-\frac{34}{9}\end{aligned}$$

☞ $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$，$|\vec{c}|=2$．

である．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\boxed{0}$ であるから

$$4k-\frac{34}{9}=0$$

より

$$k=\frac{17}{18}.$$

☞ **垂直条件**

$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}\vec{c}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=-\frac{1}{6}(4\vec{a}-3\vec{c})$$

☜ ④において，$k=\dfrac{17}{18}$ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\left(\frac{17}{18}-\frac{4}{9}\right)\vec{c}$$

$$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|^2=\left|-\frac{1}{6}(4\vec{a}-3\vec{c})\right|^2$$

$$=\frac{1}{6^2}\left|4\vec{a}-3\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{1}{6^2}\left(16\left|\vec{a}\right|^2-24\vec{a}\cdot\vec{c}+9\left|\vec{c}\right|^2\right)$$

$$=\frac{1}{6^2}(16\times3^2-24\times3+9\times2^2)$$

☜ $\left|\vec{a}\right|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=3$，$\left|\vec{c}\right|=2$.

$$=\frac{1}{6^2}\times2^2\times3^2\times(4-2+1)$$

$$=3$$

より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\sqrt{\boxed{3}}$ である．

円 K は点 P を中心とし，半径が $\sqrt{3}$ の円である．また

☜ 円 K は点 P を中心とし，点 H を通る円であるから，K の半径は $\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\sqrt{3}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$=(\vec{a}+\vec{c})-\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}\right)$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$.
また，③より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}.$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{9}(3\vec{a}+5\vec{c})$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2=\frac{1}{9^2}\left|3\vec{a}+5\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{1}{9^2}\left(9\left|\vec{a}\right|^2+30\vec{a}\cdot\vec{c}+25\left|\vec{c}\right|^2\right)$$

$$=\frac{1}{9^2}(9\times3^2+30\times3+25\times2^2)$$

$$=\frac{271}{81}>3$$

であるから，$\mathrm{PB}>\sqrt{3}$ となり，点 B は円 K の外部にある．

☜ $\mathrm{PB}>$（K の半径）.

よって，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．