センター模擬試験

第６回　数学　ⅡＢ

解説と解答

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	3，5	2	
	ウ，エ	2，1	2	
	オ，カ	3，5	2	
	キ，ク	4，3	3	
	ケコ	50	2	
	サ$\sqrt{\text{シス}}$	$5\sqrt{10}$	3	
	$\dfrac{\text{セソタ}}{\text{チ}}$	$\dfrac{-35}{9}$	2	
	ツ	0	2	
	テ，ト，ナ	2，2，2	3	
	ニ	3	3	
	ヌ	0	2	
	ネ，ノ	0，1	2	
	$\dfrac{\text{ハ}+\sqrt{\text{ヒ}}}{\text{フ}}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	
	第1問　自己採点小計		(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	アイ，ウ	−4，2	3	
	エオ	−2	2	
	カ	5	2	
	キク	−4	3	
	ケ	6	3	
	コ	3	3	
	サ，シ，ス	3，8，6	4	
	セ，ソタ，チ，ツ	6，12，8，6	4	
	テト	−1	1	
	$\dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	ヌネ$+\sqrt{\text{ノ}}$	$-2+\sqrt{3}$	1	
	$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$	$\dfrac{2}{3}$	2	
	第2問　自己採点小計		(30)	
第3問	ア，イ	3，1	3	
	$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$，$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$	3	
	キ，ク	2，3	2	
	ケ	3	2	
	コ，サ	3，3	2	
	シ，ス，セ	3，3，2	2	
	ソ	3	2	
	タチ，ツ	−3，1	2	
	テトナ	668	2	
	第3問　自己採点小計		(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア，イ，ウエ	0，2，−1	2	
	オ，カ，キ	0，2，1	2	
	ク	0	2	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{1}{5}$	3	
	$\frac{サ}{シ}$，ス，$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{3}{4}$，0，$\frac{1}{4}$	2	
	$\frac{タ}{チ}$，$\frac{ツ}{テ}$，$\frac{ト}{ナニ}$	$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{12}$	3	
	$\frac{ヌ}{ネ}$，$\frac{ノ}{ハ}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$	3	
	ヒ，フ	9，5	3	
第4問　自己採点小計			(20)	

第１問　図形と方程式，指数関数・対数関数

〔１〕 座標平面上に２点 A(1, −2)，B(3, 4) がある．直線 AB の方程式は

$$\boxed{\text{ア}}\,x-y=\boxed{\text{イ}}$$

である．線分 AB の中点 M の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ であり，M を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$x+\boxed{\text{オ}}\,y=\boxed{\text{カ}}$$

である．

直線 $x+2y=2$ を ℓ とする．また，中心が ℓ 上にあり，２点 A，B を通る円を C とする．C の方程式は

$$\left(x+\boxed{\text{キ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ク}}\right)^2=\boxed{\text{ケコ}}$$

である．円 C と直線 ℓ の２交点を D，E とする．三角形 ADE の面積は $\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ である．

〔２〕 p を１でない正の実数として，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=p^{2x}-p^{x+1}-p$$

とする．

(1) $p=3$ のとき，$f(-1)=\dfrac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である．

(2) $p=2$ とする．$t=2^x$ とおくと，x がすべての実数を変化するとき，t のとり得る値の範囲は $t>\boxed{\text{ツ}}$ であり，$f(x)$ は t を用いて

$$f(x)=t^{\boxed{\text{テ}}}-\boxed{\text{ト}}\,t-\boxed{\text{ナ}}$$

と表される．よって，x の方程式 $f(x)=1$ の解は

$$x=\log_2\boxed{\text{ニ}}$$

である．また，$\log_2\boxed{\text{ニ}}$ と２の大小関係は $\log_2\boxed{\text{ニ}}\ \boxed{\text{ヌ}}\ 2$ である．$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

(3) x の方程式 $f(x)=1$ の解が２より小さくなるような p の値の範囲は

$$\boxed{\text{ネ}}<p<\boxed{\text{ノ}},\quad \frac{\boxed{\text{ハ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}<p$$

である．

【解説】

〔１〕

A(1, −2)，B(3, 4) であるから，直線 AB の傾きは

$$\frac{4-(-2)}{3-1}=3$$

☞ $x_1\neq x_2$ のとき，２点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

である．よって，直線 AB の方程式は

$$y+2=3(x-1)$$

より

$$\boxed{3}\,x-y=\boxed{5}$$

である．また，線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{-2+4}{2}\right)$$

すなわち

$$(\boxed{2},\ \boxed{1})$$

である．M を通り，直線 AB に垂直な直線を n とすると，n の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ であるから，n の方程式は

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$$

より

$$x+\boxed{3}\,y=\boxed{5} \qquad \cdots ①$$

である．

$$\ell:\ x+2y=2. \qquad \cdots ②$$

円 C の中心を K とする．C は 2 点 A，B を通るから，AK＝BK であり，K は線分 AB の垂直二等分線である直線 n 上にある．K は直線 ℓ 上にもあるから，K は 2 直線 ℓ と n の交点である．よって，① と ② から $x=-4$，$y=3$ であり，K の座標は $(-4,\ 3)$ である．

また，C の半径 r は

$$r=\mathrm{AK}=\sqrt{(-4-1)^2+\{3-(-2)\}^2}$$
$$=5\sqrt{2}$$

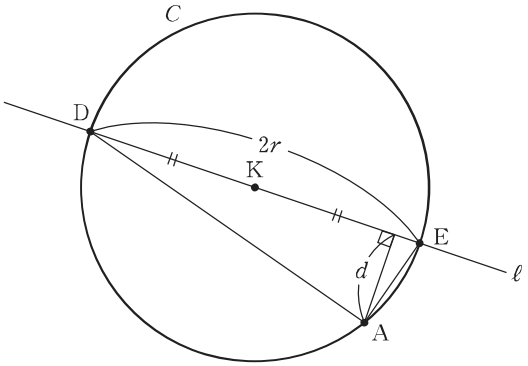
であるから，C の方程式は

$$\{x-(-4)\}^2+(y-3)^2=(5\sqrt{2})^2$$

すなわち

$$\left(x+\boxed{4}\right)^2+\left(y-\boxed{3}\right)^2=\boxed{50}$$

である．



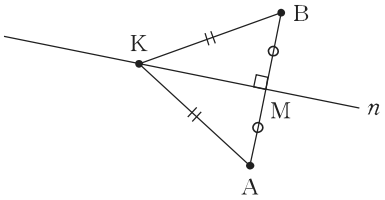
直線の方程式

点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

傾きが m $(\neq 0)$ の直線に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{m}$.

AK＝BK＝(C の半径).



2 点間の距離

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

円の方程式

点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

D と E の位置は逆でもよい．

A(1, −2) と $\ell: x+2y-2=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1+2\cdot(-2)-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

であるから，三角形 ADE の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{DE}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$$

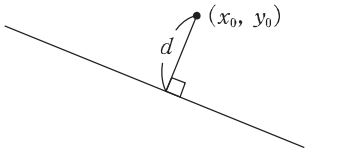
$$=\boxed{5}\sqrt{\boxed{10}}$$

である．

点と直線の距離

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



$\mathrm{DE}=2r=10\sqrt{2}$.

〔2〕

$$p>0,\quad p\neq 1.$$
$$f(x)=p^{2x}-p^{x+1}-p.$$

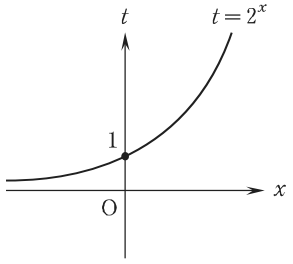
(1) $p=3$ のとき，$f(x)=3^{2x}-3^{x+1}-3$ であるから

$$f(-1)=3^{-2}-3^0-3$$
$$=\frac{1}{3^2}-1-3$$
$$=\frac{\boxed{-35}}{\boxed{9}}$$

である．

(2) $p=2$ のとき，$f(x)=2^{2x}-2^{x+1}-2$ である．

$t=2^x$ とおくと，x がすべての実数を変化するとき，t のとり得る値の範囲は $t>\boxed{0}$ であり



$$f(x)=(2^x)^2-2^x\cdot 2^1-2$$
$$=t^{\boxed{2}}-\boxed{2}\,t-\boxed{2}$$

である．よって，x の方程式 $f(x)=1$ は

$$t^2-2t-2=1$$

すなわち

$$t^2-2t-3=0$$
$$(t+1)(t-3)=0$$

となる．$t>0$ であるから，$t=3$.

よって，$2^x=3$ より，$f(x)=1$ の解は

$t=2^x$.

$$x=\log_2\boxed{3}$$

である．また，$\log_2 3$ と 2 の大小関係は

$$\log_2 3<\log_2 4=2$$

であるから，$\boxed{\text{ヌ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

対数

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0$ のとき

$a^x=M \iff x=\log_a M$.

底：$2>1$.

(3) $s=p^x$ (>0) とおくと

$$f(x)=(p^x)^2-p^x\cdot p^1-p$$
$$=s^2-ps-p$$

である．よって，x の方程式 $f(x)=1$ は

$$s^2-ps-p=1$$

すなわち

$$s^2-ps-(p+1)=0$$
$$(s+1)\{s-(p+1)\}=0$$

となる．

$s>0$ であるから

$$s=p+1$$

すなわち

$$p^x=p+1 \qquad \cdots ①$$

☜ $s=p^x$.

である．

① において，$x<2$ を満たすような p の値の範囲を考える．

(i) $0<p<1$ のとき $\cdots ②$

$$x<2 \quad より \quad p^x>p^2$$

☜ $0<a<1$ のとき $M<N \iff a^M>a^N$.

であるから，① より

$$p+1>p^2 \qquad \cdots ③$$

となる．ここで，② より

$$p+1>1>p^2$$

が成り立つから，② を満たすすべての p について ③ が成り立つ．

(ii) $p>1$ のとき $\cdots ④$

$$x<2 \quad より \quad p^x<p^2$$

☜ $a>1$ のとき $M<N \iff a^M<a^N$.

であるから，① より

$$p+1<p^2$$

すなわち

$$p^2-p-1>0$$

となる．さらに ④ より

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}<p.$$

したがって，方程式 $f(x)=1$ の解が 2 より小さくなるような p の値の範囲は

$$\boxed{0}<p<\boxed{1}, \quad \frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}<p$$

である．

第２問　微分法・積分法

p，q を実数とし，x の関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x)=-2x^2+2x+3$$

$$g(x)=x^2+px+q$$

とする．また，曲線 $y=f(x)$，曲線 $y=g(x)$ をそれぞれ C，D とする．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{アイ}}x+\boxed{\text{ウ}}$$

である．曲線 C 上の点 A(1, 3) における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{エオ}}x+\boxed{\text{カ}}$$

である．

曲線 D が点 A を通り，A における D の接線が ℓ と一致するとき

$$p=\boxed{\text{キク}},\quad q=\boxed{\text{ケ}}$$

である．以下，$p=\boxed{\text{キク}}$，$q=\boxed{\text{ケ}}$ とする．

k を $k>-2$ を満たす実数とし，点 A を通り，傾き k の直線を m とする．D と m の共有点の x 座標は

$$1,\quad k+\boxed{\text{コ}}$$

である．D と m と y 軸で囲まれた部分の面積を S_1，D と m で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{\boxed{\text{サ}}k+\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

$$S_2=\frac{k^3+\boxed{\text{セ}}k^2+\boxed{\text{ソタ}}k+\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．ここで，$S(k)=S_1-S_2$ とする．

a を $a>-2$ を満たす定数とし，k が $-2<k<a$ の範囲を変化するとき，$S(k)$ のとり得る値の範囲は

$-2<a\leqq\boxed{\text{テト}}$ のとき，$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}<S(k)<S(a)$

$\boxed{\text{テト}}<a\leqq\boxed{\text{ヌネ}}+\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ のとき，$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}<S(k)\leqq\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$

$\boxed{\text{ヌネ}}+\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}<a$ のとき，$S(a)<S(k)\leqq\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$

である．

【解説】

$f(x)=-2x^2+2x+3$ であるから，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{-4}x+\boxed{2}$$

である．よって，曲線 C 上の点 A(1, 3) における C の接線 ℓ の傾きは $f'(1)=-2$ であるから，ℓ の方程式は

$$y-3=-2(x-1)$$

より

$$y=\boxed{-2}x+\boxed{5}$$

である．

$g(x)=x^2+px+q$ であるから，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ は

$$g'(x)=2x+p$$

である．曲線 D が点 A を通り，A における D の接線が ℓ と一致する条件は

$$\begin{cases} g(1)=3 \\ g'(1)=-2 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 1+p+q=3 \\ 2+p=-2 \end{cases}$$

である．これより

$$p=\boxed{-4},\quad q=\boxed{6}$$

である．以下，$p=-4$，$q=6$，すなわち

$$g(x)=x^2-4x+6$$

とする．

点 A を通り，傾き k $(k>-2)$ の直線が m であるから，m の方程式は

$$y-3=k(x-1)$$

より

$$y=kx-k+3$$

である．$h(x)=kx-k+3$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x)-h(x)&=(x^2-4x+6)-(kx-k+3) \\ &=x^2-(k+4)x+k+3 \qquad \cdots ① \\ &=(x-1)\{x-(k+3)\} \end{aligned}$$

である．k が $k>-2$ を満たすとき，D と m の共有点の x 座標は

$$g(x)-h(x)=0$$

すなわち

$$(x-1)\{x-(k+3)\}=0$$

より

$$1,\ k+\boxed{3}$$

である．また，$k>-2$ より，$k+3>1$ である．

☞ **導関数**

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，

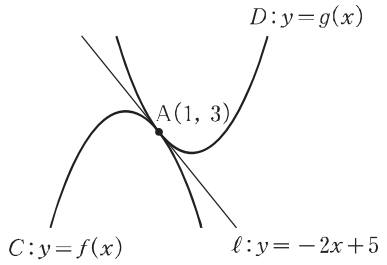
$(c)'=0$ （c は定数）．

☞ **接線の方程式**

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

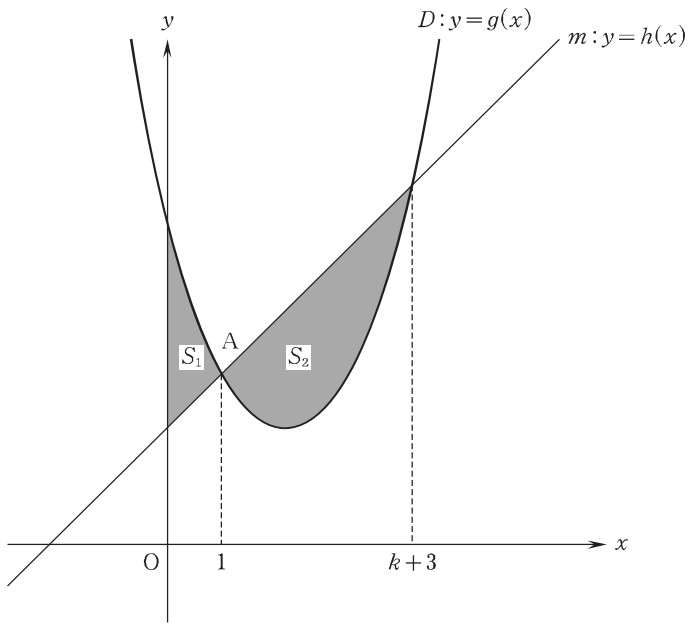
☞



☞ **直線の方程式**

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き k の直線の方程式は

$$y-y_1=k(x-x_1).$$



D と m と y 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1=\int_0^1\{g(x)-h(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1\{x^2-(k+4)x+k+3\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k+4}{2}x^2+(k+3)x\right]_0^1$$

$$=\frac{\boxed{3}\,k+\boxed{8}}{\boxed{6}}$$

である．D と m で囲まれた部分の面積 S_2 は

$$S_2=\int_1^{k+3}\{h(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=-\int_1^{k+3}(x-1)\{x-(k+3)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(k+3)-1\}^3$$

$$=\frac{1}{6}(k+2)^3$$

$$=\frac{k^3+\boxed{6}\,k^2+\boxed{12}\,k+\boxed{8}}{\boxed{6}}$$

である．よって

$$S(k)=S_1-S_2$$

$$=\frac{(3k+8)-(k^3+6k^2+12k+8)}{6}$$

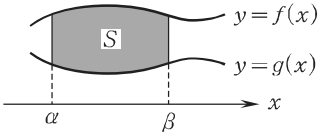
$$=-\frac{1}{6}(k^3+6k^2+9k)$$

である．このとき

面積

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



☜ ① を用いた．

☜ **不定積分**

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，C は積分定数．）

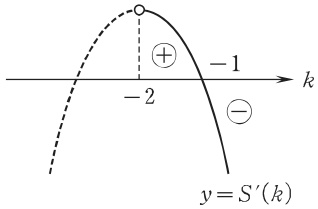
☜ $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いた．

$$S'(k)=-\frac{1}{6}(3k^2+12k+9)$$
$$=-\frac{1}{2}(k^2+4k+3)$$
$$=-\frac{1}{2}(k+1)(k+3)$$

であるから，$k>-2$ における $S(k)$ の増減は次の表のようになる．

k	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$
$S'(k)$		$+$	0	$-$
$S(k)$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	↗	$\frac{2}{3}$	↘

☞



$S'(k)$ の符号は $y=S'(k)$ のグラフを用いて判断するとよい．

ここで，$S(k)=\frac{1}{3}$ かつ $k>-2$ を満たす k の値を求める．

$S(k)=\frac{1}{3}$ は

$$-\frac{1}{6}(k^3+6k^2+9k)=\frac{1}{3}$$

すなわち

$$k^3+6k^2+9k+2=0$$

となり，この左辺を因数定理を用いて因数分解すると

$$(k+2)(k^2+4k+1)=0$$

☞ $k\geqq-2$ で考えると

$$S(-2)=\frac{1}{3}$$

が成り立っているので

$$T(k)=k^3+6k^2+9k+2$$

とおくと

$$T(-2)=0$$

が成り立つ．よって，因数定理より $T(k)$ は $k+2$ で割り切れる．

となる．よって

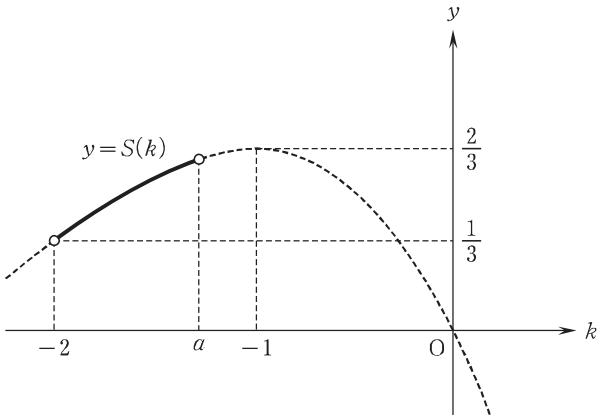
$$k=-2,\ -2\pm\sqrt{3}.$$

$k>-2$ より

$$k=-2+\sqrt{3}.$$

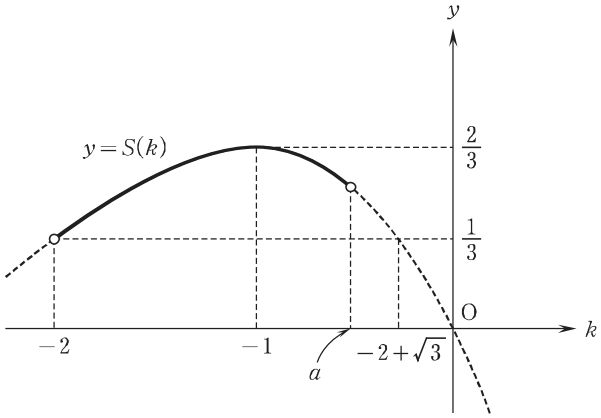
したがって，k が $-2<k<a$ $(a>-2)$ の範囲を変化するとき，$S(k)$ のとり得る値の範囲は次のようになる．

(i) $-2<a\leqq\boxed{-1}$ のとき



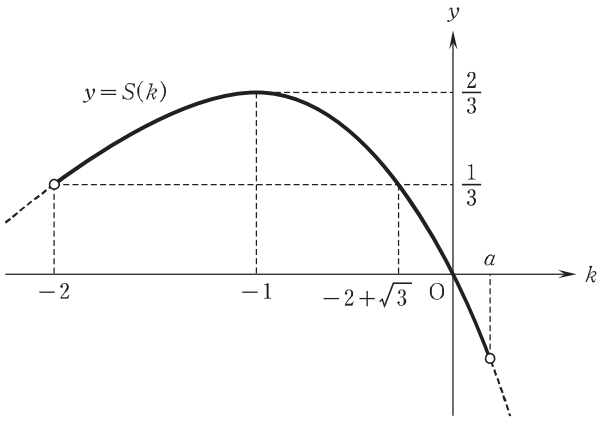
$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}<S(k)<S(a).$$

(ii)　$-1 < a \leqq \boxed{-2} + \sqrt{\boxed{3}}$ のとき



$$\frac{1}{3} < S(k) \leqq \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}.$$

(iii)　$-2+\sqrt{3} < a$ のとき



$$S(a) < S(k) \leqq \frac{2}{3}.$$

第3問　数　列

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ア}}\,n-\boxed{\text{イ}}$$

であり

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}n^2+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n$$

である．

(1)　数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=1,\ b_{n+1}=2b_n+a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で定める．① と，① の n を $n+1$ に置きかえて得られる等式から

$$b_{n+2}-b_{n+1}=\boxed{\text{キ}}(b_{n+1}-b_n)+\boxed{\text{ク}}$$

が得られる．ここで，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_{n+1}-b_n$ で定める．このとき

$$c_{n+1}+\boxed{\text{ケ}}=\boxed{\text{キ}}\left(c_n+\boxed{\text{ケ}}\right)$$

が成り立つ．よって

$$c_n=\boxed{\text{コ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{\,n}-\boxed{\text{サ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$b_n=\boxed{\text{シ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{\,n}-\boxed{\text{ス}}\,n-\boxed{\text{セ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(2)　$S_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．m を自然数として

$$S_{2m}=\boxed{\text{ソ}}\,m$$

$$S_{2m-1}=\boxed{\text{タチ}}\,m+\boxed{\text{ツ}}$$

と表されるから，$S_n\geqq 1000$ を満たす最小の自然数 n の値は

$$\boxed{\text{テトナ}}$$

である．

【解説】

$$a_1=2,$$

$$a_{n+1}=a_n+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

より，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 3 の等差数列なので

$$a_n=\boxed{3}\,n-\boxed{1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$=\frac{n\{2+(3n-1)\}}{2}$$

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d.$$

等差数列の和

初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は

$$\frac{n(a+\ell)}{2}.$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}n$$

である．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=1,$$
$$b_{n+1}=2b_n+a_n$$

すなわち

$$b_{n+1}=2b_n+3n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots ①$$

☜ $a_n=3n-1$.

で定める．① の n を $n+1$ に置きかえると

$$b_{n+2}=2b_{n+1}+3n+2 \qquad \cdots ②$$

を得る．②−① より

$$b_{n+2}-b_{n+1}=\boxed{2}(b_{n+1}-b_n)+\boxed{3}$$

が成り立つから，$b_{n+1}-b_n=c_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より

$$c_{n+1}=2c_n+3 \qquad \cdots ③$$

☜ $c_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$.

となる．さらに変形すると

$$c_{n+1}+\boxed{3}=2(c_n+3) \qquad \cdots ④$$

☜ $c_{n+1}=pc_n+q \quad (p\neq 1)$ は $\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を用いて $c_{n+1}-\alpha=p(c_n-\alpha)$ と変形できる．③ は，$p=2$，$q=3$ の場合であり，$\alpha=-3$ である．

が得られる．

また，① より

$$b_2=2b_1+2=2\cdot 1+2=4$$

であるから

$$c_1=b_2-b_1=4-1=3$$

である．

よって，$c_1=3$ と ④ より，数列 $\{c_n+3\}$ は初項 $c_1+3=6$，公比 2 の等比数列なので

$$c_n+3=6\cdot 2^{n-1}$$

☜ **等比数列の一般項**
初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n=ar^{n-1}$.

$$=3\cdot 2^n$$

☜ $6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$.

であるから

$$c_n=\boxed{3}\cdot 2^n-\boxed{3} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すなわち

$$b_{n+1}-b_n=3\cdot 2^n-3 \qquad \cdots ⑤$$

☜ $c_n=b_{n+1}-b_n$.

となる．① を ⑤ に代入して b_{n+1} を消去すると

$$(2b_n+3n-1)-b_n=3\cdot 2^n-3$$

より

$$b_n=\boxed{3}\cdot 2^n-\boxed{3}n-\boxed{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(2) $S_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，m を自然数として

$$\begin{aligned}S_{2m}&=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k a_k\\&=\sum_{\ell=1}^{m}\{(-1)^{2\ell-1}a_{2\ell-1}+(-1)^{2\ell}a_{2\ell}\}\\&=\sum_{\ell=1}^{m}(-a_{2\ell-1}+a_{2\ell})\\&=\sum_{\ell=1}^{m}3\\&=\boxed{\ 3\ }m\end{aligned}$$

☞ $a_{2\ell-1}$ と $a_{2\ell}$ は等差数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項なので

$a_{2\ell}-a_{2\ell-1}=3$ （＝公差）

である．

☞ $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}3=\overbrace{3+3+\cdots+3}^{m\text{ 個}}$
$=3m.$

と表され

$$\begin{aligned}S_{2m-1}&=S_{2m}-(-1)^{2m}a_{2m}\\&=3m-(6m-1)\\&=\boxed{-3}\,m+\boxed{\ 1\ }\end{aligned}$$

☞ $a_n=3n-1$ であるから

$a_{2m}=3\cdot 2m-1=6m-1.$

と表される．$S_{2m-1}=-3m+1<0$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，$S_n\geqq 1000$ を満たす n は偶数である．

よって

$$S_{2m}=3m\geqq 1000$$

より

$$m\geqq\frac{1000}{3}=333+\frac{1}{3}$$

を満たす m を考えればよい．m は自然数だから

$$m\geqq 334$$

となり，$S_n\geqq 1000$ を満たす最小の自然数 n の値は

$$n=2\cdot 334=\boxed{\ 668\ }$$

☞ $m=334$ のときの n の値である．

である．

第4問　ベクトル

Oを原点とする座標空間に，4点A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(1, 2, 0)，D(0, 2, 0)がある．このとき

$$\overrightarrow{AD}=(\boxed{ア},\ \boxed{イ},\ \boxed{ウエ})$$

である．

(1)　直線AD上の点Hが$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AD}$を満たしている．このとき，$t$を実数として$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AD}$と表されるから

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AD}$$
$$=(\boxed{オ},\ \boxed{カ}t,\ \boxed{キ}-t)$$

である．さらに，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AD}=\boxed{ク}$であるから

$$t=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

である．

(2)　線分ABを3:1に内分する点をLとすると，Lの座標は$\left(\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}},\ \boxed{ス},\ \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\right)$である．

また，三角形ALDの重心をGとすると，Gの座標は$\left(\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}},\ \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}},\ \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}\right)$である．

平面ACDと直線OGの交点をKとする．点Kは平面ACD上にあるから，実数α，βを用いて

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

と表される．また，点Kは直線OG上にあるから

$$\alpha=\frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}},\quad \beta=\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}$$

である．

(3)　(1)の点Hと(2)の点Kについて，四面体OHACの体積をV_1，四面体OKACの体積をV_2とすると

$$V_1:V_2=\boxed{ヒ}:\boxed{フ}$$

である．

【解説】

A(0, 0, 1)，D(0, 2, 0)であるから

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(0,\ 2,\ 0)-(0,\ 0,\ 1)$$
$$=(\boxed{0},\ \boxed{2},\ \boxed{-1})$$

☞　$\overrightarrow{OD}=(0,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{OA}=(0,\ 0,\ 1)$．

である．

(1)
$$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AD}$$
すなわち
$$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AD}$$
より
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AD}\\&=(0,\ 0,\ 1)+t(0,\ 2,\ -1)\\&=(\boxed{0},\ \boxed{2}t,\ \boxed{1}-t)\end{aligned}$$
である．また
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AD}&=0\cdot0+2t\cdot2+(1-t)\cdot(-1)\\&=5t-1\end{aligned}$$
であり，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AD}$ より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AD}=\boxed{0}$ であるから
$$5t-1=0$$
すなわち
$$t=\frac{\boxed{1}}{\boxed{5}}$$
である．

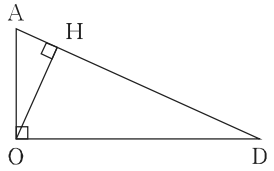
内積

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$

$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

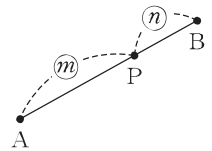
のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$



(2) 線分 AB を 3:1 に内分する点が L であるから
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL}&=\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}\\&=\frac{1}{4}(0,\ 0,\ 1)+\frac{3}{4}(1,\ 0,\ 0)\\&=\left(\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$
より，L の座標は
$$\left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}},\ \boxed{0},\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\right)$$
である．また，三角形 ALD の重心が G であるから
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OD}}{3}\\&=\frac{1}{3}(0,\ 0,\ 1)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}(0,\ 2,\ 0)\\&=\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{12}\right)\end{aligned}$$
より，G の座標は
$$\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}},\ \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}},\ \frac{\boxed{5}}{\boxed{12}}\right)$$
である．

内分点の位置ベクトル



線分 AB を $m:n$ の比に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

重心の位置ベクトル

三角形 ABC の重心を G とすると

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}.$$

点 K は平面 ACD と直線 OG の交点である．点 K は平面 ACD 上にあるから，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$
$$=(0,\ 0,\ 1)+\alpha(1,\ 2,\ -1)+\beta(0,\ 2,\ -1)$$
$$=(\alpha,\ 2\alpha+2\beta,\ 1-\alpha-\beta) \quad \cdots ①$$

と表される．また，点 K は直線 OG 上にあるから，実数 γ を用いて

$$\overrightarrow{OK}=\gamma\overrightarrow{OG}$$
$$=\gamma\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{12}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}\gamma,\ \frac{2}{3}\gamma,\ \frac{5}{12}\gamma\right) \quad \cdots ②$$

と表される．よって，① と ② より

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{4}\gamma \\ 2\alpha+2\beta=\dfrac{2}{3}\gamma \\ 1-\alpha-\beta=\dfrac{5}{12}\gamma \end{cases}$$

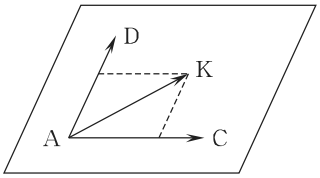
が成り立つ．この連立方程式を解くと

$$\alpha=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}},\quad \beta=\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}},\quad \gamma=\frac{4}{3}$$

である．

☜ A(0, 0, 1)，C(1, 2, 0) より

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(1,\ 2,\ -1).$$



点 K が平面 ACD 上にあるから，α，β を実数として

$$\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

と表される．よって

$$\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

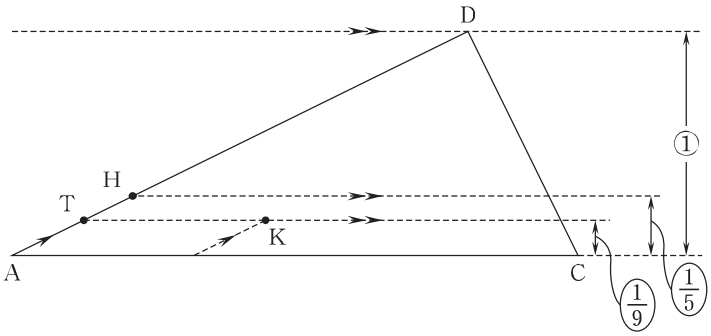
より

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}.$$

(3) (1) の点 H と (2) の点 K について，四面体 OHAC の体積が V_1，四面体 OKAC の体積が V_2 である．四面体 OHAC と四面体 OKAC は頂点 O が共通であり，2 点 H，K はともに平面 ACD 上にあることより

$$V_1:V_2=\triangle ACH:\triangle ACK$$

である．さらに，二つの三角形 ACH と ACK の底辺をともに辺 AC とみると，二つの三角形の面積比は高さの比と一致する．



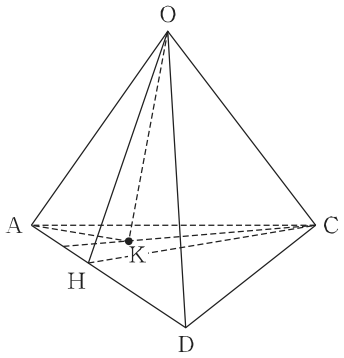
$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ より，AH : AD = 1 : 5.

また，TK // AC を満たすように点 T を辺 AD 上にとると，

$\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AD}$ より，AT : AD = 1 : 9.

よって，二つの三角形 ACH と ACK の高さの比は

☜



四面体 OHAC の底面を三角形 HAC，四面体 OKAC の底面を三角形 KAC とみると，二つの四面体の高さは同じである．よって

(体積比) = (底面積比)

が成り立つ．

☜ $t=\dfrac{1}{5}$.

☜ $\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\beta=\dfrac{1}{9}$.

$$\frac{1}{5}:\frac{1}{9}=9:5$$

であるから

$$V_1:V_2=\boxed{\ 9\ }:\boxed{\ 5\ }$$

である．