センター模擬試験

第６回　数学　ＩＡ

解説と解答

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{ア+\sqrt{イ}}{ウ}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	
	$\sqrt{エ}-オ$	$\sqrt{5}-1$	2	
	$カ\sqrt{キ}$	$2\sqrt{5}$	2	
	クケ	12	2	
	コサシ	112	2	
	ス	3	3	
	$\dfrac{セ\sqrt{ソ}}{タ}$	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	3	
	$チ\sqrt{ツ}$	$2\sqrt{2}$	2	
	$\dfrac{テ\sqrt{ト}}{ナ}$	$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\dfrac{ニy^2+ヌ}{32y}$	$\dfrac{8y^2+5}{32y}$	3	
	$\dfrac{ネ\sqrt{ノ}}{ハ}$	$\dfrac{5\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\dfrac{ヒ\sqrt{フ}}{ヘ}$	$\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$	3	
第1問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア	2	2	
	$b-イa$	$b-4a$	2	
	ウエ	22	2	
	オカ	-5	2	
	$a=キク,\ b=ケコ$	$a=-3,\ b=10$	3	
	サ	4	2	
	$シ+\sqrt{ス}$	$1+\sqrt{7}$	2	
	セ	4	2	
	ソ	1	3	
	タ.チ	5.0	2	
	ツテ.トナ	11.20	2	
	ニ	2	2	
	ヌ	5	1	
	ネ.ノハ	0.60	1	
	ヒ	2	2	
第2問 自己採点小計			(30)	
第3問	ア	2	3	
	イ	3	3	
	$\dfrac{ウ}{エ}$	$\dfrac{1}{8}$	3	
	$\dfrac{オ}{カキ}$	$\dfrac{3}{16}$	3	
	$\dfrac{ク}{ケコ}$	$\dfrac{2}{11}$	4	
	$\dfrac{サシ}{スセソ}$	$\dfrac{49}{432}$	4	
第3問 自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア$k-1$	$2k-1$	2	
	イ	1	2	
	ウ	0	2	
	エ	3	3	
	$\frac{オ}{カ}$	$\frac{1}{2}$	3	
	$(x-キ)(y-ク)=8$	$(x-4)(y-4)=8$	4	
	ケ，コサ，シス	5，12，13	4	
第4問　自己採点小計			(20)	

第１問　数と式，図形と計量

〔１〕 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり，$p=2\alpha$，$q=\dfrac{2}{\alpha}$ とすると

$$q=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}-\boxed{\text{オ}}$$

$$p+q=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$

である．

また

$$p^2+q^2=\boxed{\text{クケ}}$$

$$p^4+q^4=\boxed{\text{コサシ}}$$

である．

〔２〕 △ABC は，AB＝3，BC＝2，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{3}$ を満たすとする．このとき

$$\mathrm{CA}=\boxed{\text{ス}},\quad \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

△ABC の外接円上の点 B を含まない弧 CA 上に点 D を CD＝AD であるようにとる．CD＝x とすると

$$x=\frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．

また，BD＝y とし，△BCD に余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{CBD}=\frac{\boxed{\text{ニ}}y^2+\boxed{\text{ヌ}}}{32y}$$

であり，同様に，△ABD に余弦定理を用い，さらに，∠CBD＝∠ABD であることにより

$$y=\frac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

を得る．

四角形 ABCD の対角線の交点を E とすると

$$\sin\angle\mathrm{AEB}=\frac{\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である．

【解説】

〔1〕

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解は，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

☜ 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

であるから，

$$\alpha=\frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である．

よって，

$$\begin{aligned}p&=2\alpha\\&=1+\sqrt{5},\\q&=\frac{2}{\alpha}\\&=\frac{4}{1+\sqrt{5}}\\&=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1}\\&=\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{1}\end{aligned}$$

☜ 分母の有理化．

であり，

$$\begin{aligned}p+q&=(1+\sqrt{5})+(\sqrt{5}-1)\\&=\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}\end{aligned}$$

である．

また，

$$pq=2\alpha\cdot\frac{2}{\alpha}=4$$

である．

したがって，

$$\begin{aligned}p^2+q^2&=(p+q)^2-2pq\\&=(2\sqrt{5})^2-2\cdot4\\&=\boxed{12},\end{aligned}$$

☜ $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$ より，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq.$$

$$\begin{aligned}p^4+q^4&=(p^2+q^2)^2-2(pq)^2\\&=12^2-2\cdot4^2\\&=\boxed{112}\end{aligned}$$

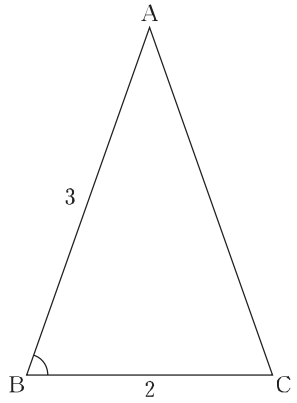
☜ $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ において，

$$A=p^2,\quad B=q^2$$

とした．

である．

〔2〕



余弦定理より，

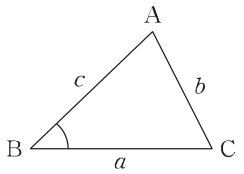
$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{3}$$
$$=9$$

であるから，

$$\mathrm{CA}=\boxed{3}$$

である．

☞ **余弦定理**



$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$

また，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}$$

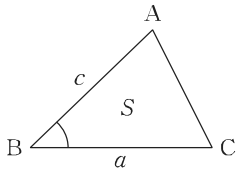
であり，

☞ $0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}$$

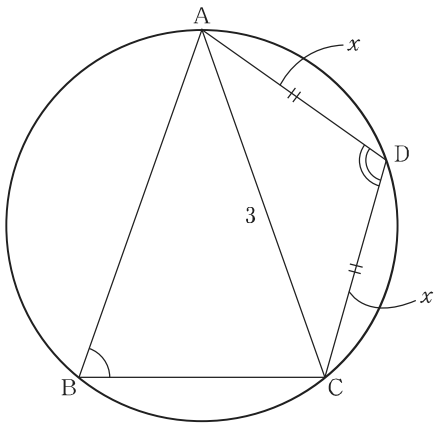
である．

☞ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$

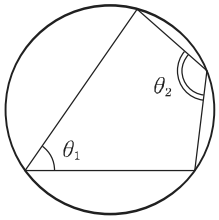
与えられた条件より，次の図を得る．



四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\cos\angle\mathrm{ADC}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$$
$$=-\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

である．



円に内接する四角形の対角の和は 180°

であるから，

$$\theta_2=180^\circ-\theta_1.$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.$$

△ACD に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

すなわち

$$3^2=x^2+x^2-2x\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

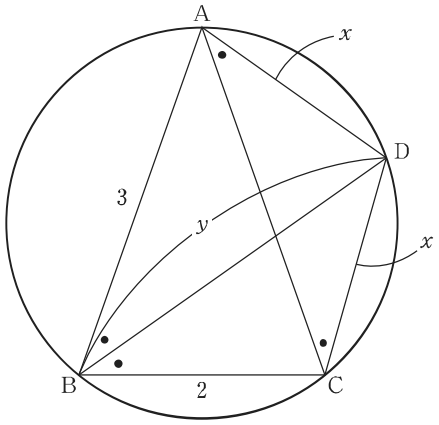
であるから，

$$x^2=\frac{27}{8}$$

となり，$x>0$ より，

$$x=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

である．



△BCD に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{CBD}=\frac{\mathrm{BD}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2}{2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{y^2+2^2-x^2}{2\cdot y\cdot 2}$$

$$=\frac{\boxed{8}\,y^2+\boxed{5}}{32y} \qquad \cdots ① \ ☜ \quad x^2=\frac{27}{8}.$$

であり，△ABD に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{ABD}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-\mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}}$$

$$=\frac{3^2+y^2-x^2}{2\cdot 3y}$$

$$=\frac{8y^2+45}{48y} \qquad \cdots ②$$

である．

CD＝AD より，∠CBD＝∠ABD であるから，

$$\cos\angle\mathrm{CBD}=\cos\angle\mathrm{ABD}$$

が成り立つ．

これに ①，② を代入すると，

$$\frac{8y^2+5}{32y}=\frac{8y^2+45}{48y}$$

である．

これより，

$$\frac{8y^2+5}{2}=\frac{8y^2+45}{3}$$

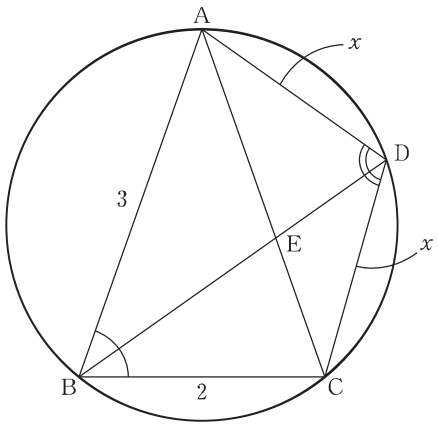
すなわち

$$y^2=\frac{75}{8}$$

であり，$y>0$ より，

$$y=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

である．



四角形 ABCD の面積を S とすると，

$$S=(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})+(\triangle\mathrm{ACD}\text{ の面積})$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{ADC}$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{1}{2}x^2\sin(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{27}{16}\sin\angle\mathrm{ABC}$$

☞ $x^2=\frac{27}{8}$.

$$=2\sqrt{2}+\frac{27}{16}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

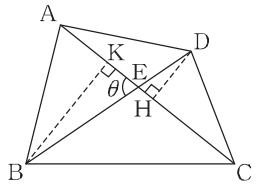
$$=\frac{25\sqrt{2}}{8} \qquad \cdots ③$$

である．

一方，S は対角線の長さ AC，BD を用いて，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{AEB}$$

☞



四角形 ABCD について，対角線 AC，BD の交点を E，なす角を θ $(0^\circ<\theta\leqq 90^\circ)$，B，D から直線 AC に下ろした垂線の足をそれぞれ K，H とすると，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BK}+\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DH}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DE}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}(\mathrm{BE}+\mathrm{ED})\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta.$$

また，$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin(180^\circ-\theta).$$

と表せるから，これと ③ より，

$$\frac{25\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{AEB}$$

となる．

したがって，

$$\sin\angle\mathrm{AEB}=\frac{25\sqrt{2}}{4\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}$$

$$=\frac{25\sqrt{2}}{4\cdot 3\cdot\frac{5\sqrt{6}}{4}}$$

$$=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$$

である．

第2問　2次関数，データの分析

〔1〕 a，b を実数 $(a \neq 0)$ とし，x の2次関数

$$y = ax^2 - 4ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

(1) G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ b - \boxed{\text{イ}}\,a\right)$$

である．

$a = 3$，$b = 7$ のとき，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数①の最大値は $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{オカ}}$ である．

また，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数①の最大値が $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，最小値が $\boxed{\text{オカ}}$ であるとき，$a \neq 3$ とすると

$$a = \boxed{\text{キク}},\quad b = \boxed{\text{ケコ}}$$

である．

(2) 以下，$a > 0$，$b = 2a^2 - a - 12$ とする．

G が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は

$$0 < a \leqq \boxed{\text{サ}}$$

であり，G が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が1より大きくなるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}} < a \leqq \boxed{\text{セ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．

実数 a に関する条件 s，t を次のように定める．

s：a は②を満たす

t：G は y 軸の正の部分と共有点をもつ

このとき，t は s であるための $\boxed{\text{ソ}}$．

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

〔2〕 次の表は，あるクラスの生徒10人に対して行われた英語のテストと数学のテスト（各10点満点）の得点をまとめたものである．ただし，テストの得点は整数値である．

	英語	数学
生徒 1	1	6
生徒 2	1	4
生徒 3	2	6
生徒 4	2	4
生徒 5	3	5
生徒 6	6	A
生徒 7	8	5
生徒 8	9	5
生徒 9	9	4
生徒 10	9	6

英語のデータの平均値と数学のデータの平均値は等しいことがわかっている．

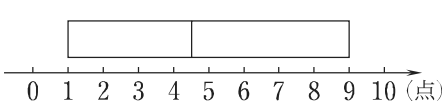
以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

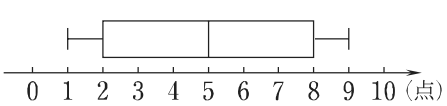
また，四分位数とは，データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値であり，小さい方から順に，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数という．第 2 四分位数は中央値である．データが偶数個の値からなるとき，データを値の大きさの順に並べて 2 等分したときの下位のデータの中央値が第 1 四分位数，上位のデータの中央値が第 3 四分位数である．

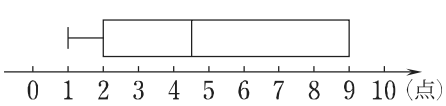
(1) 英語のデータの平均値は $\boxed{タ}.\boxed{チ}$ 点であり，分散は $\boxed{ツテ}.\boxed{トナ}$ である．

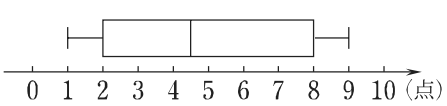
英語のデータの箱ひげ図として適切なものは $\boxed{ニ}$ である．

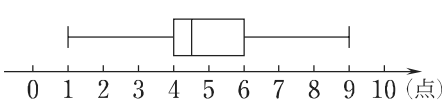
$\boxed{ニ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

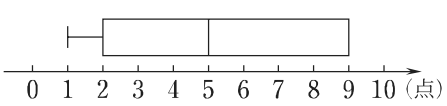
⓪


①


②


③


④


⑤


(2) A の値は $\boxed{ヌ}$ であり，数学のデータの分散は $\boxed{ネ}.\boxed{ノハ}$ である．

(3) 英語の得点と数学の得点の相関係数として適切な値は $\boxed{ヒ}$ である．

$\boxed{ヒ}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ −0.8　① −0.4　② 0　③ 0.4　④ 0.8

【解説】

〔1〕

$$f(x)=ax^2-4ax+b$$

☞ $f(x)$ は ① の右辺.

とすると,

$$f(x)=a(x-2)^2+b-4a \qquad \cdots ①'$$

と変形される.

(1) ①′ より G の頂点の座標は,

$$\left(\boxed{\ 2\ },\ b-\boxed{\ 4\ }a\right)$$

である.

$a=3$, $b=7$ のときの $f(x)$ を $f_1(x)$ とすると, ①′ より,

$$f_1(x)=3(x-2)^2-5$$

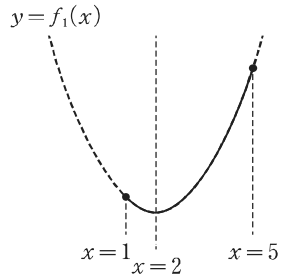
であり, $y=f_1(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから, $1\leqq x\leqq 5$ における関数 $y=f_1(x)$ の

最大値は　$f_1(5)=\boxed{\ 22\ }$,

最小値は　$f_1(2)=\boxed{\ -5\ }$

である.

☞



$a>0$ のとき, 関数 $y=f(x)$ の最大値が 22 で, 最小値が -5 となるのは $a=3$, $b=7$ のときに限るから, $a<0$ のときについて考える.

$a<0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから, $1\leqq x\leqq 5$ における関数 $y=f(x)$ の

最大値は　$f(2)=-4a+b$,

最小値は　$f(5)=5a+b$

であり, 最大値が 22 で, 最小値が -5 となるとき,

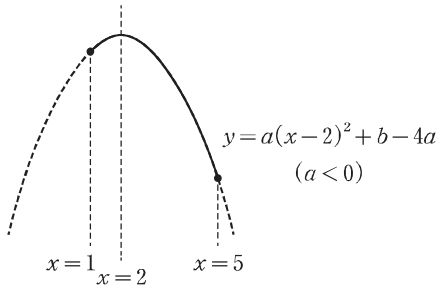
$$\begin{cases}-4a+b=22,\\ 5a+b=-5\end{cases}$$

を解いて,

$$a=\boxed{\ -3\},\quad b=\boxed{\ 10\ }$$

である.

☞



(2) $a>0$, $b=2a^2-a-12$ のときの $f(x)$ を $f_2(x)$ とすると, ①′ より,

$$f_2(x)=a(x-2)^2+2a^2-5a-12 \quad (a>0)$$

であり, $y=f_2(x)$ のグラフは下に凸の放物線である.

放物線 $y=f_2(x)$ $(a>0)$ が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は,

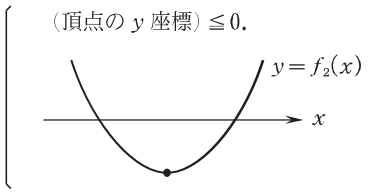
$$a>0 \quad かつ \quad 2a^2-5a-12\leqq 0$$

すなわち

$$a>0 \quad かつ \quad (2a+3)(a-4)\leqq 0$$

すなわち

☞



$$a>0 \quad かつ \quad -\frac{3}{2} \leqq a \leqq 4$$

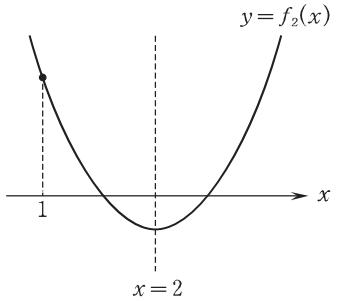
より，

$$0<a \leqq \boxed{4} \qquad \cdots ③$$

である．

放物線 $y=f_2(x)$ の軸は直線 $x=2$ (>1) であるから，放物線 $y=f_2(x)$ が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が 1 より大きくなる条件は，

$$③ \quad かつ \quad f_2(1)>0$$



である．

$f_2(1)>0$ より，

$$2a^2-4a-12>0$$

すなわち

$$2(a^2-2a-6)>0$$

であり，これより，

$$a<1-\sqrt{7}, \quad 1+\sqrt{7}<a$$

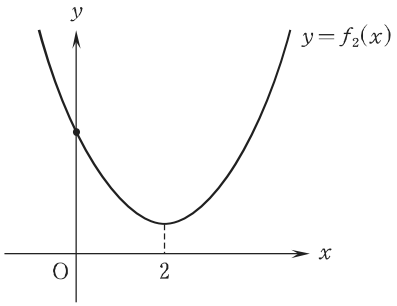
であるから，これと ③ より求める a の値の範囲は，

$$\boxed{1}+\sqrt{\boxed{7}}<a \leqq \boxed{4} \qquad \cdots ②$$

である．

放物線 $y=f_2(x)$ $(a>0)$ が y 軸の正の部分と共有点をもつような a の値の範囲は，

$$a>0 \quad かつ \quad f_2(0)>0$$



すなわち

$$a>0 \quad かつ \quad 2a^2-a-12>0$$

すなわち

$$\frac{1+\sqrt{97}}{4}<a \qquad \cdots ④$$

である．

②，④ より，

$$s: 1+\sqrt{7}<a \leqq 4,$$

$$t: \frac{1+\sqrt{97}}{4}<a$$

である．

$9<\sqrt{97}<10$ より $10<1+\sqrt{97}<11$ であるから，

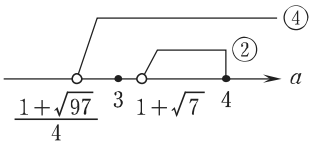
$$\frac{5}{2}<\frac{1+\sqrt{97}}{4}<\frac{11}{4} \ (<3)$$

であり，また，$2<\sqrt{7}<3$ より $3<1+\sqrt{7}<4$ であるから，

$$\frac{1+\sqrt{97}}{4}<1+\sqrt{7}$$

である．

よって，「$s \Longrightarrow t$」は真であり「$t \Longrightarrow s$」は偽（反例：$a=3$）であるから，t は s であるための必要条件であるが，十分条件ではないから，$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．



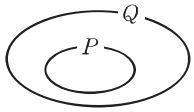
（$\boxed{\text{ソ}}$ の別解）

放物線 $y=f_2(x)$ の軸は直線 $x=2$ (>1) であり，② のとき $f_2(1)>0$ であるから，$f_2(0)>0$ となる．よって，

$$「s \Longrightarrow t」は真$$

である．

条件 p を満たす集合を P，条件 q を満たす集合を Q とする．「$p \Longrightarrow q$」が真であることと $P \subset Q$ であることは同じである．



「$p \Longrightarrow q$」が真であるとき，
p は q であるための十分条件，
q は p であるための必要条件
という．

次に，$a=3$ のとき，

$$f_2(x)=3x^2-12x+3$$

であるから，

$$f_2(0)=3>0$$

となり，$a=3$ のとき ④ すなわち t は成り立つ．

一方，$2<\sqrt{7}<3$ より，$3<1+\sqrt{7}<4$ であるから，$a=3$ のとき ② すなわち s は成り立たない．よって，

$a=3$ は「$t \Longrightarrow s$」に対する反例になっている．

$$「t \Longrightarrow s」は偽$$

である．

したがって，t は s であるための必要条件であるが，十分条件ではない，すなわち $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

〔2〕

英語のテストの得点を x，数学のテストの得点を y と表す．

(1) 英語のデータの平均値を $\overline{x}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{1+1+2+2+3+6+8+9+9+9}{10}$$
$$=\frac{50}{10}$$
$$=\boxed{5}.\boxed{0}\ (点)$$

平均値

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

である．

英語のデータの分散を $s_x{}^2$ とすると，

$$s_x{}^2=\frac{1}{10}\{(1-5)^2+(1-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2\}$$
$$=\frac{112}{10}$$
$$=\boxed{11}.\boxed{20}$$

偏差・分散

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなり，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，…，$x_n-\overline{x}$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，（これらの）偏差の 2 乗の平均値が x の分散 s^2 である．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

である．

x のデータは 10（偶数）個の値からなるから，

(第 1 四分位数) = (五つの値 1, 1, 2, 2, 3 の中央値)

$= 2,$

(中央値) $= \dfrac{3+6}{2}$

$= 4.5,$

(第 3 四分位数) = (五つの値 6, 8, 9, 9, 9 の中央値)

$= 9$

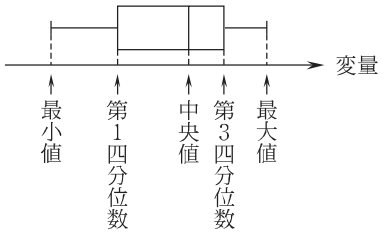
である.

☜ データが偶数個の値からなるとき，中央値はデータを大きさの順に並べたときに中央に並ぶ二つの値の平均値である.

また，得点が整数値であることを考慮し，箱ひげ図⓪～⑤の第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数の値を書き出すと次のとおりである.

	⓪	①	②	③	④	⑤
第 1 四分位数	1	2	2	2	4	2
中央値	4.5	5	4.5	4.5	4.5	5
第 3 四分位数	9	8	9	8	6	9

☜ 下図のように，最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値を箱と線(ひげ)を用いて一つの図に表したものを箱ひげ図という.



よって，英語のデータの箱ひげ図として適切なものは②であるから，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である.

(2) 数学のデータの平均値を $\overline{y}$ とすると，

$$\overline{y} = \frac{6+4+6+4+5+\mathsf{A}+5+5+4+6}{10}$$

$$= \frac{45+\mathsf{A}}{10}$$

であり，これが $\overline{x}$ と等しいから，

$$\frac{45+\mathsf{A}}{10} = 5$$

$$\mathsf{A} = \boxed{5}$$

☜ $\overline{x} = 5.$

である.

数学のデータの分散を $s_y{}^2$ とすると，

$$s_y{}^2 = \frac{1}{10}\{(6-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2$$
$$+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2$$
$$+(4-5)^2+(6-5)^2\}$$

$$= \frac{6}{10}$$

$$= \boxed{0}.\boxed{60}$$

である.

(3) x と y の共分散を s_{xy} とすると，

$$s_{xy}=\frac{1}{10}\{(-4)\cdot1+(-4)\cdot(-1)+(-3)\cdot1+(-3)\cdot(-1)$$
$$+(-2)\cdot0+1\cdot0+3\cdot0+4\cdot0$$
$$+4\cdot(-1)+4\cdot1\}$$
$$=\frac{0}{10}$$
$$=0$$

である．よって，x と y の相関係数を r とすると，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$
$$=0$$

であるから，$\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

共分散

二つの変量 x，y のデータが n 個の組 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) として与えられているとし，変量 x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，共分散 s_{xy} は，

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}.$$

相関係数

二つの変量 x，y について，それらの分散をそれぞれ $s_x{}^2$，$s_y{}^2$ とし，共分散を s_{xy} とすると，相関係数 r は，

$$r=\frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x{}^2}\sqrt{s_y{}^2}}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

第3問　場合の数と確率

(1)　文字R，W，Bについて，R，W，B各一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，R三つ，W一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．

(2)　袋の中に赤玉3個，白玉2個，黒玉1個の合計6個の玉が入っている．

この袋から1個の玉を取り出し，取り出した玉の色を記録し，玉を袋に戻す．この操作を，同じ色が3回記録されるか3色がすべて記録されるまで繰り返す．

赤が3回記録されて3回で操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

赤が3回記録されてちょうど4回で操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり，4回目に赤が記録されて操作が終了するという条件のもとで，3色がすべて記録されて操作が終了する条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

5回目に赤が記録されて操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である．

【解説】

(1)　R，W，B各一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は，はじめの二つの文字が，W，B各一つとなるときであるから，その並べ方を考えて，

$$2! = \boxed{2}\ (\text{通り})$$

ある．

☜　WBR
　　BWR

R三つ，W一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は，はじめの三つの文字が，R二つ，W一つとなるときであるから，その並べ方を考えて，

$${}_3C_1 = \boxed{3}\ (\text{通り})$$

ある．

☜　WRRR
　　RWRR
　　RRWR

(2)　取り出した玉の色に対して，赤，白，黒を，それぞれR，W，Bと記録することとする．

袋から1個の玉を取り出すとき，Rと記録する確率は，

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

Wと記録する確率は，

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

B と記録する確率は，

$$\frac{1}{6}$$

である．

R が 3 回記録されて 3 回で操作が終了する確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

である．

R が 3 回記録されてちょうど 4 回で操作が終了するのは次のいずれかである．

・はじめの 3 回で R が 2 回，W が 1 回記録され，4 回目に R が記録される．　☜ WRR|R / RWR|R / RRW|R

・はじめの 3 回で R が 2 回，B が 1 回記録され，4 回目に R が記録される．

よって，R が 3 回記録されてちょうど 4 回で操作が終了する確率は，

$$\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{16}} \qquad \cdots ①$$

である．

4 回目に R が記録されて操作が終了するという事象を E，3 色がすべて記録されて操作が終了するという事象を F とする．

$E\cap F$ は次のいずれかである．

・はじめの 3 回で W が 2 回，B が 1 回記録され，4 回目に R が記録される．　☜ WWB|R / WBW|R / BWW|R

・はじめの 3 回で W が 1 回，B が 2 回記録され，4 回目に R が記録される．

よって，$E\cap F$ が起こる確率 $P(E\cap F)$ は，

$$P(E\cap F)=\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{24}. \qquad \cdots ②$$

また，ちょうど 4 回で R が 3 回記録されて操作が終了するという事象と 4 回目に R が記録され 3 色すべてが記録されて操作が終了するという事象は互いに排反であるから，E が起こる確率 $P(E)$ は，①，② より，

$$P(E)=\frac{3}{16}+\frac{1}{24}$$

$$=\frac{11}{48}.$$

よって，求める条件つき確率 $P_E(F)$ は，

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$$

$$=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{11}{48}}$$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{11}}$$

である．

☜ **条件つき確率**

事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる確率を，事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件つき確率といい，$P_A(B)$ で表す．

A，$A\cap B$ が起こる確率をそれぞれ $P(A)$，$P(A\cap B)$ とすると，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

5 回目に R が記録されて操作が終了するのは次のいずれかである．

・はじめの 4 回で R が 2 回，W が 2 回記録され，5 回目に R が記録される． ☜ R が 3 回記録されて終了する．

・はじめの 4 回で R が 2 回，B が 2 回記録され，5 回目に R が記録される． ☜ R が 3 回記録されて終了する．

・はじめの 4 回で W が 2 回，B が 2 回記録され，5 回目に R が記録される． ☜ 3 色がすべて記録されて終了する．

よって，5 回目に R が記録されて操作が終了する確率は，

$$\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\boxed{49}}{\boxed{432}}$$

である．

第4問　整数の性質

(1)　自然数 n が奇数であるとき，k を自然数として $n=$ $\boxed{\text{ア}}$ $k-1$ と表すことができ，n^2 を4で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$ である．

自然数 n が偶数であるとき，k を自然数として $n=$ $\boxed{\text{ア}}$ k と表すことができ，n^2 を4で割った余りは $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2)　a，b，c はどの二つも互いに素な自然数であり

$$a^2+b^2=c^2$$

を満たしている．

このとき，a^2，b^2，c^2 を4で割った余りを考えることにより，$\boxed{\text{エ}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　a，b，c のうち奇数は一つだけ
①　c は偶数
②　a，b，c はすべて偶数
③　a，b のうちいずれか一方のみが偶数

(3)　3辺の長さがどの二つも互いに素な自然数であるような直角三角形のうち，その面積が周の長さと等しいものを求めてみよう．

直角三角形の3辺の長さを x，y，z とする．ただし，$x \leqq y < z$ である．

このとき

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}xy=x+y+z \end{cases}$$

が成り立つ．

これらから z を消去すると

$$\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)\left(y-\boxed{\text{ク}}\right)=8$$

が成り立つから，条件を満たす直角三角形の3辺の長さは

$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コサ}}$ と $\boxed{\text{シス}}$

である．ただし，$\boxed{\text{コサ}} < \boxed{\text{シス}}$ とする．

【解説】

(1)　自然数 n が奇数であるとき，k を自然数として，

$$n=\boxed{2}k-1$$

と表すことができるから，

$$n^2=4(k^2-k)+1$$

であり，n^2 を4で割った余りは $\boxed{1}$ である．

自然数 n が偶数であるとき，k を自然数として，

$$n=2k$$

と表すことができるから，

$$n^2=4k^2$$

であり，n^2 を 4 で割った余りは $\boxed{0}$ である．

(2)　$$a^2+b^2=c^2. \qquad \cdots ①$$

a，b それぞれの奇数，偶数に対して，a^2+b^2 を 4 で割った余りは，(1) の結果により，次の表のようになる．

a ＼ b	奇数	偶数
奇数	2	1
偶数	1	0

条件より，a，b は互いに素な自然数であるから，a，b が両方とも偶数であることはない．

☞ ②は不適である．

さらに，(1) の結果より c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であるから，a，b，c が ① を満たすとき，上の表より，

「a，b のうち一方は偶数で他方は奇数」

であり，「c^2 を 4 で割った余りは 1」すなわち

「c は奇数」

☞ 選択肢⓪，①はともに不適である．

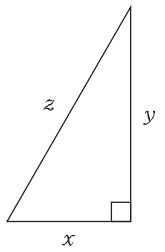
である．

したがって，$\boxed{エ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☞ $a=3$，$b=4$，$c=5$ とすると①は成り立つから，③を満たす a，b，c は存在する．

(3)　直角三角形の 3 辺の長さが x，y，z $(x \leqq y < z)$ であるとき，三平方の定理により，

☞



$$x^2+y^2=z^2 \qquad \cdots ②$$

が成り立ち，この直角三角形について，

$$(\text{面積})=\frac{1}{2}xy, \quad (\text{周の長さ})=x+y+z$$

であるから，

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}xy=x+y+z$$

すなわち

$$z=\frac{1}{2}xy-(x+y) \qquad \cdots ③$$

が成り立つ．

③ を ② に代入すると，

$$x^2+y^2=\left\{\frac{1}{2}xy-(x+y)\right\}^2$$

であり，この右辺を変形すると，

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}x^2y^2-2\cdot\frac{1}{2}xy\cdot(x+y)+(x+y)^2$$

すなわち

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}x^2y^2-xy(x+y)+(x^2+2xy+y^2)$$

となるから，

$$0=\frac{1}{4}x^2y^2-xy(x+y)+2xy$$

である．

この両辺を $xy\,(>0)$ で割ると，

$$0=\frac{1}{4}xy-(x+y)+2$$

すなわち

$$xy-4(x+y)+8=0$$

である．

これより，

$$(x-4)(y-4)-16+8=0$$

すなわち

$$\left(x-\boxed{4}\right)\left(y-\boxed{4}\right)=8$$

が成り立つ．

$x-4$，$y-4$ は，$-4<x-4\leqq y-4$ を満たす整数であり，とも に 8 の約数であるから，

☜ $0<x\leqq y$ より，
$-4<x-4\leqq y-4$.

$$(x-4,\ y-4)=(1,\ 8),\ (2,\ 4)$$

すなわち

$$(x,\ y)=(5,\ 12),\ (6,\ 8)$$

である．

ここで，x と y は互いに素であるから，

$$(x,\ y)=(5,\ 12)$$

である．

このとき，③ より，

$$z=13$$

☜ このとき，x，y，z はどの二つも互いに素である．

であるから，条件を満たす直角三角形の 3 辺の長さは，

$\boxed{5}$ と $\boxed{12}$ と $\boxed{13}$

である．