セ ン タ ー 模 擬 試 験

第５回　数学　ⅡＢ

解説と解答

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	0	2	
	イ	5	3	
	ウ，エ	2，1	3	
	オ，カ，キ	4，1，2	2	
	ク	1	2	
	ケ	6	2	
	コ$\sqrt{サ}$，シ	$2\sqrt{3}$，3	2	
	スセ，ソ	−2，3	2	
	タt^2＋チt＋ツ	$-t^2+2t+3$	2	
	テ	2	1	
	ト	3	1	
	ナニ	−5	2	
	ヌ	4	2	
	$\frac{ネ}{ノ}$	$\frac{5}{3}$	2	
	$\frac{ハヒ}{フ}$	$\frac{13}{6}$	2	
第1問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イ，ウ，エ	3，6，6，3	3	
	オ	2	3	
	カ	1	3	
	キ	6	3	
	ク	3	3	
	（ケ，コサ）	（1，−1）	3	
	（シ，ス）	（2，0）	3	
	$\frac{セソ}{タ}x+\frac{チ}{ツ}$	$\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}$	3	
	テ	1	3	
	$\frac{ト}{ナ}$	$\frac{4}{3}$	3	
第2問 自己採点小計			(30)	
第3問	アn＋イ	$2n+1$	2	
	$n^{ウ}$＋エn	n^2+2n	2	
	$\frac{1}{オ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{1}{カk+キ}-\frac{1}{クk+ケ}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}$	2	
	$\frac{n}{コ(サn+シ)}$	$\frac{n}{3(2n+3)}$	2	
	スセ	32	2	
	ソタ	32	2	
	チツ	39	2	
	テn^2−トn＋ナ	$2n^2-2n+3$	2	
	ニヌネ	333	2	
第3問 自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$，$\frac{オ}{カ}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$	2	
	$\frac{キ}{ク}$，$\frac{ケ}{コ}$，$\frac{サ}{シ}$	$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{3}$	2	
	ス	3	2	
	セ	2	2	
	ソ	6	2	
	タ	3	2	
	$\frac{チツ}{テト}$	$\frac{33}{13}$	3	
	$\frac{ナニ}{ヌネ}$	$\frac{40}{13}$	3	

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

〔１〕 a を正の実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=2^{x-2}-a$$

とする．

(1) $a=1$ のとき，$f(2)=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $a=8$ のとき，$f(x)\leqq 0$ を満たす自然数 x は全部で $\boxed{\text{イ}}$ 個ある．

(3) x の方程式 $f(x)=1$ の解は

$$\boxed{\text{ウ}}+\log_2\left(a+\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

正の実数 u に対して，$a=u$ のときの $f(x)=1$ の解を x_1，$a=\dfrac{1}{u}$ のときの $f(x)=1$ の解を x_2 とおく．

$$x_1+x_2=\boxed{\text{オ}}+\log_2\left(u+\frac{\boxed{\text{カ}}}{u}+\boxed{\text{キ}}\right)$$

であり，u が $u>0$ の範囲を変化するとき，x_1+x_2 は $u=$ $\boxed{\text{ク}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる．

〔２〕 x の関数 $g(x)$ を

$$g(x)=2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin x+2\sqrt{3}\cos x$$

とする．

(1) $t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと

$$t^2=\sin^2 x+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin x\cos x+\boxed{\text{シ}}\cos^2 x$$

$$=\boxed{\text{スセ}}\sin^2 x+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin x\cos x+\boxed{\text{ソ}}$$

であるから，$g(x)$ を t を用いて表すと

$$g(x)=\boxed{\text{タ}}t^2+\boxed{\text{チ}}t+\boxed{\text{ツ}}$$

である．

また，t は

$$t=\boxed{\text{テ}}\sin\left(x+\frac{\pi}{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

と表すことができる．

(2) x が $0\leqq x<2\pi$ の範囲を変化するとき，$g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ナニ}}\leqq g(x)\leqq\boxed{\text{ヌ}}$$

である．

(3) b は正の実数とする．x の方程式 $g(x)=3$ が，$0\leqq x<b$ の範囲において，ちょうど三つの実数解をもつような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\pi < b \leqq \frac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\pi$$

である．

【解説】

〔1〕

$$f(x)=2^{x-2}-a.$$

(1) $a=1$ のとき，$f(x)=2^{x-2}-1$ である．したがって

$$f(2)=2^0-1=\boxed{0}.$$

☜ $2^0=1$.

(2) $a=8$ のとき，$f(x)=2^{x-2}-8$ である．$f(x)\leqq 0$ より

$$2^{x-2}\leqq 2^3$$

☜ $8=2^3$.

であり，底の 2 は 1 より大きいので

$$x-2\leqq 3$$

$$x\leqq 5.$$

☜ $b>1$ のとき

$b^p\leqq b^q \iff p\leqq q$.

これを満たす自然数 x は全部で $\boxed{5}$ 個ある．

☜ $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

(3) $f(x)=1$ より

$$2^{x-2}-a=1$$

$$2^{x-2}=a+1.$$

両辺で底を 2 とする対数をとると

$$x-2=\log_2(a+1)$$

$$x=\boxed{2}+\log_2\left(a+\boxed{1}\right).$$

☜ $b>0,\ b\neq 1,\ y>0$ のとき

$y=b^x \iff x=\log_b y$.

$a=u$ とすると $x_1=2+\log_2(u+1)$，$a=\dfrac{1}{u}$ とすると

$x_2=2+\log_2\left(\dfrac{1}{u}+1\right)$ であるから

$$x_1+x_2=4+\log_2(u+1)+\log_2\left(\frac{1}{u}+1\right)$$

$$=4+\log_2(u+1)\left(\frac{1}{u}+1\right)$$

$$=\boxed{4}+\log_2\left(u+\frac{\boxed{1}}{u}+\boxed{2}\right)$$

☜ $b>0,\ b\neq 1,\ M>0,\ N>0$ のとき

$\log_b M+\log_b N=\log_b MN$.

となる．

ここで，$u>0$，$\dfrac{1}{u}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$u+\frac{1}{u}\geqq 2\sqrt{u\cdot\frac{1}{u}}=2$$

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0,\ b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

等号は $a=b$ のとき成り立つ．

☜ 左では $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ として相加平均と相乗平均の大小関係を用いた．

（等号は，$u=\dfrac{1}{u}$ かつ $u>0$ より $u=1$ のとき成立）

が成り立つ．したがって

$$u+\frac{1}{u}+2\geqq 4$$

$$\log_2\left(u+\frac{1}{u}+2\right)\geqq \log_2 4$$

☜ $b>1$，$M>0$，$N>0$ のとき $M\leqq N \iff \log_b M\leqq \log_b N$.

$$4+\log_2\left(u+\frac{1}{u}+2\right)\geqq 4+2=6$$

☜ $\log_2 4=\log_2 2^2=2$.

となる．

よって，u が $u>0$ の範囲を変化するとき，x_1+x_2 は

$u=\boxed{1}$ のとき最小値 $\boxed{6}$ をとる．

〔2〕

$$g(x)=2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin x+2\sqrt{3}\cos x.$$

(1) $t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと

$$\begin{aligned}t^2&=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2\\&=\sin^2 x+\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}\sin x\cos x+\boxed{3}\cos^2 x\\&=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3(1-\sin^2 x)\\&=\boxed{-2}\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\boxed{3}\end{aligned}$$

☜ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

であるから

$$2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=3-t^2$$

である．したがって，$g(x)$ を t を用いて表すと

$$\begin{aligned}g(x)&=(2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x)+2(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\\&=(3-t^2)+2t\\&=\boxed{-}t^2+\boxed{2}t+\boxed{3}\end{aligned}$$

である．

また，$t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の右辺を合成すると

$$t=\boxed{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{\boxed{3}}\right)$$

☜

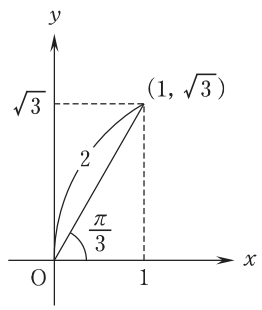
三角関数の合成

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$.

ただし，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ であり

$\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$.



と表すことができる．

(2) $0\leqq x<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから，

$t=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとり得る値の範囲は

$$-2\leqq t\leqq 2 \quad \cdots ①$$

☜ $-1\leqq \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$ より

$-2\leqq 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 2$.

である．

また，$g(x)=-t^2+2t+3$ の右辺を $h(t)$ とおくと

$$h(t)=-(t-1)^2+4$$

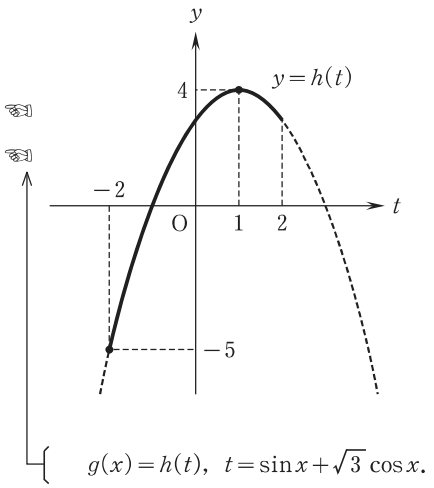
より，① における $h(t)$ のとり得る値の範囲は

$$-5 \leqq h(t) \leqq 4.$$

よって，$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{-5} \leqq g(x) \leqq \boxed{4}$$

である．



(3) $g(x)=3$ より，$-t^2+2t+3=3$ を満たす t の値は

$$t(t-2)=0$$

$$t=0,\ 2$$

である．$t=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ なので

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\ 2$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\ 1. \qquad \cdots ②$$

まず，$x \geqq 0$ において ② を満たす x の値を調べる．

$x+\dfrac{\pi}{3} \geqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ より

$$x+\frac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$$

☜ $\theta \geqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin\theta=0$ より $\theta=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots.$

すなわち

$$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \cdots$$

である．

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ より

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ \cdots$$

☜ $\theta \geqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin\theta=1$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \cdots.$

すなわち

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi,\ \cdots$$

である．したがって，② を満たす x（$\geqq 0$）の値は，小さい方から

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \cdots$$

である．

よって，x の方程式 $g(x)=3$ が，$0 \leqq x < b$ の範囲において，ちょうど三つの実数解をもつような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\pi < b \leqq \frac{\boxed{13}}{\boxed{6}}\pi$$

である．

☜ $0 \leqq x < b$ には，小さい方から 3 番目の $\dfrac{5}{3}\pi$ を含み，4 番目の $\dfrac{13}{6}\pi$ は含まない．

第2問　微分法・積分法

k を実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3-3kx^2+(6k^2-3)x-2k$$

とする．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イ}}kx+\boxed{\text{ウ}}k^2-\boxed{\text{エ}}$$

である．曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における C の接線 ℓ の傾きは $f'\left(\boxed{\text{オ}}\right)$ であり，ℓ の傾きが 3 であるときの k の値は $\boxed{\text{カ}}$ である．このとき，ℓ の方程式は，$y=3x-\boxed{\text{キ}}$ である．以下，$k=\boxed{\text{カ}}$ とする．

(1)　関数 $f(x)$ は $\boxed{\text{ク}}$．$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　極大値と極小値をもつ
①　極大値をもち，極小値をもたない
②　極小値をもち，極大値をもたない
③　極値をもたない

(2)　x の関数 $g(x)$ を $g(x)=2x^2-5x+2$ とし，曲線 $y=g(x)$ を D とする．C と D の共有点は二つあり，それらの座標は $\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$ である．点 $\left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$ を A とし，点 A を通り ℓ に垂直な直線を m とする．m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}x+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．m と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq\boxed{\text{ケ}}$ の表す領域に含まれる部分の面積は $\boxed{\text{テ}}$ である．

t を実数とし，2 点 P，Q を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(t,\ g(t))$ で定める．t が $\boxed{\text{ケ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{シ}}$ の範囲を変化するとき，線分 PQ の長さは $t=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大となる．

【解説】

$$f(x)=x^3-3kx^2+(6k^2-3)x-2k.$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{6}kx+\boxed{6}k^2-\boxed{3}$$

である．曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における C の接線 ℓ の傾きは $f'\left(\boxed{2}\right)$ であり，ℓ の傾きが 3 であるとき

☜ **導関数**
$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3)$，
$(c)'=0$ （c は定数）．

$$f'(2)=3$$

である．よって

$$3\cdot 2^2-6k\cdot 2+6k^2-3=3$$
$$6k^2-12k+6=0$$
$$6(k-1)^2=0$$

が成り立つ．これを満たす k の値は $\boxed{1}$ である．このとき

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-2$$

であり

$$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+3\cdot 2-2=0$$

であるから，ℓ の方程式は

$$y=3(x-2)$$

すなわち

$$y=3x-\boxed{6}$$

である．以下，$k=1$ とする．

接線

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは

$$f'(t)$$

であり，接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

(1)
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$=3(x-1)^2\geqq 0$$

より，$f(x)$ は極値をもたない．したがって，$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

(2) x の関数 $g(x)$ を $g(x)=2x^2-5x+2$ とし，曲線 $y=g(x)$ を D とする．C と D の共有点の x 座標は方程式

$$f(x)=g(x)$$
$$f(x)-g(x)=0$$

の実数解である．

$$f(x)-g(x)=(x^3-3x^2+3x-2)-(2x^2-5x+2)$$
$$=x^3-5x^2+8x-4 \quad \cdots ①$$
$$=(x-1)(x-2)^2 \quad \cdots ②$$

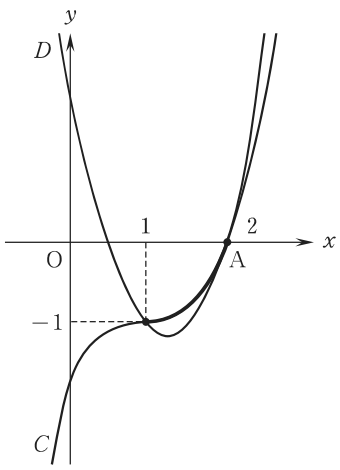
であるから，$f(x)-g(x)=0$ の実数解は

$$x=1,\ 2.$$

このとき，C と D の共有点の y 座標はそれぞれ

$$y=-1,\ 0.$$

よって，C と D の共有点の座標は $(\boxed{1},\ \boxed{-1})$，$(\boxed{2},\ \boxed{0})$ である．点 $(2,\ 0)$ を A とし，点 A を通り ℓ に垂直な直線を m とする．ℓ の傾きは 3 であるから，m の方程式は



$$y=-\frac{1}{3}(x-2)$$

$$y=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{3}}x+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

である．m と D の共有点の x 座標を求めると

$$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=2x^2-5x+2$$

$$3x^2-7x+2=0$$

$$(3x-1)(x-2)=0$$

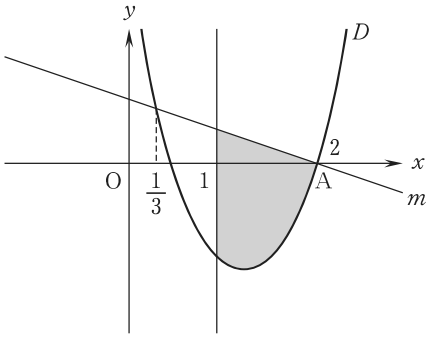
$$x=\frac{1}{3},\ 2$$

である．

垂直条件

傾き m の直線と，傾き m' の直線が垂直となる条件は

$$mm'=-1.$$



よって，m と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq 1$ の表す領域に含まれる部分は図の影の部分であり，その面積は

$$\int_1^2\left\{\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)-(2x^2-5x+2)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int_1^2(6x^2-14x+4)\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}\Big[2x^3-7x^2+4x\Big]_1^2$$

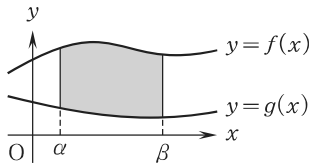
$$=\boxed{1}$$

である．

面積

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



不定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

（$n=0,\ 1,\ 2,\ C$ は積分定数.）

t を実数とし，2 点 P，Q を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(t,\ g(t))$ で定める．t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲を変化するとき

$$f(t)-g(t)=(t-1)(t-2)^2\geqq 0$$

であることに注意すると，① より，線分 PQ の長さは

$$|f(t)-g(t)|=f(t)-g(t)$$

$$=t^3-5t^2+8t-4$$

② より

$f(t)-g(t)=(t-1)(t-2)^2.$

① より

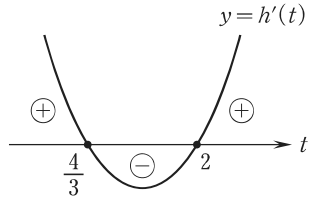
$f(t)-g(t)=t^3-5t^2+8t-4.$

となる．これを $h(t)$ とおくと

$$h'(t)=3t^2-10t+8$$

$$=(3t-4)(t-2)$$

であるから，$h(t)$ の $1\leqq t\leqq 2$ における増減は次の表のようになる．



$h'(t)$ の符号はグラフを用いると調べやすい．

t	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0
$h(t)$		↗	最大	↘	

よって，t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を変化するとき，線分 PQ の長さは $t = \dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$ で最大となる．

第3問　数　列

数列 $\{a_n\}$ を $a_1+a_2=8$，$a_4=9$ である等差数列とする．

数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\boxed{\text{ア}}n+\boxed{\text{イ}}$ であり

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^{\boxed{\text{ウ}}}+\boxed{\text{エ}}n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

さらに

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}k+\boxed{\text{キ}}}-\frac{1}{\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{ケ}}}\right) \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを利用すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{n}{\boxed{\text{コ}}\left(\boxed{\text{サ}}n+\boxed{\text{シ}}\right)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分ける．

a_1	$a_2,\ a_3,\ a_4$	$a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9$	$\cdots$
第1群	第2群	第3群	

ここで，一般に第 n 群は $(2n-1)$ 個の項からなるものとする．

(1)　a_1 から第 n 群の末項までの項数を T_n とする．$T_n\geqq 1000$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{スセ}}$ であるから，a_{1000} は第 $\boxed{\text{ソタ}}$ 群の小さい方から $\boxed{\text{チツ}}$ 番目の項である．

(2)　自然数 n に対し，第 n 群の小さい方から n 番目の項を b_n とすると

$$b_n=\boxed{\text{テ}}n^2-\boxed{\text{ト}}n+\boxed{\text{ナ}}$$

である．

自然数 n に対し，b_n を 3 で割ったときの余りを r_n とすると

$$\sum_{k=1}^{1000}r_k=\boxed{\text{ニヌネ}}$$

である．

【解説】

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると一般項は

$$a_n=a+(n-1)d$$

である．

$a_1+a_2=8$，$a_4=9$ より

$$\begin{cases} a+(a+d)=8, \\ a+3d=9 \end{cases}$$

であるから

$$a=3,\ d=2.$$

よって

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 2$$
$$= \boxed{\ 2\ }n + \boxed{\ 1\ } \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

また

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\{3+(2n+1)\}$$
$$= n^{\boxed{2}} + \boxed{\ 2\ }n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

☜ **等差数列の和**

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{n}{2}(a_1+a_n).$$

さらに

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}$$
$$= \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{2}{a_k a_{k+1}}$$

☜ $a_k = 2k+1.$

$a_{k+1} = 2(k+1)+1 = 2k+3.$

より

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{\boxed{\ 2\ }}\left(\frac{1}{\boxed{\ 2\ }k+\boxed{\ 1\ }} - \frac{1}{\boxed{\ 2\ }k+\boxed{\ 3\ }}\right)$$

☜ $\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3} = \dfrac{2}{a_k a_{k+1}}$ の両辺を 2 で割った．

が成り立つことを利用すると

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+3)-3}{3(2n+3)}$$
$$= \frac{n}{\boxed{\ 3\ }\left(\boxed{\ 2\ }n+\boxed{\ 3\ }\right)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分ける．

$$\underbrace{a_{T_1}}_{\text{1 個}} \ \Big|\ \underbrace{a_2,\ a_3,\ a_{T_2}}_{\text{3 個}} \ \Big|\ \cdots \ \Big|\ \underbrace{\cdots,\ a_{T_{n-1}}}_{(2n-3)\text{ 個}} \ \Big|\ \underbrace{\cdots,\ a_{T_n}}_{(2n-1)\text{ 個}} \ \Big|\ \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 $n-1$ 群　第 n 群

ここでは，a_1 から第 n 群の末項までの項数が T_n であるから，第 n 群の末項は a_{T_n} である．

(1)
$$T_n = 1+3+\cdots+(2n-1)$$
$$= \frac{n}{2}\{1+(2n-1)\}$$
$$= n^2$$

であるから，$T_n \geqq 1000$ すなわち $n^2 \geqq 1000$ を満たす最小の自然

数 n は $\boxed{32}$ である．

☜ $31^2=961<1000$，$32^2=1024>1000$.

a_1	$a_2,\ a_3,\ a_4$	$\cdots$	$\cdots,\ a_{961}$	$\cdots,\ a_{1000},\ \cdots,\ a_{1024}$	$\cdots$
第 1 群	第 2 群		第 31 群	第 32 群	

第 31 群の末項は a_{961}，第 32 群の末項は a_{1024} であるから，a_{1000} は第 32 群に含まれ，$1000-961=39$ より，この群の中で小さい方から 39 番目である．したがって a_{1000} は第 $\boxed{32}$ 群の小さい方から $\boxed{39}$ 番目の項である．

☜ 第 n 群の末項は a_{T_n}，すなわち，a_{n^2}.

(2) 第 n 群の小さい方から n 番目の項 b_n は，第 $n-1$ 群の末項から n 項だけ後の項であるから

$$b_n=a_{T_{n-1}+n}=a_{(n-1)^2+n}=a_{n^2-n+1}$$
$$=2(n^2-n+1)+1$$
$$=\boxed{2}n^2-\boxed{2}n+\boxed{3}$$

である．

☜ b_n は数列 $\{a_n\}$ の第 $(T_{n-1}+n)$ 項である．

☜ $a_n=2n+1$.

b_n を 3 で割ったときの余り r_n について

$$\begin{cases}\text{(i)}\quad n=3\ell-2\\ \text{(ii)}\quad n=3\ell-1\quad(\ell=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\\ \text{(iii)}\quad n=3\ell\end{cases}$$

に分けて考える．

☜ $\begin{cases}\text{(i)}\quad n=1,\ 4,\ 7,\ \cdots\\ \text{(ii)}\quad n=2,\ 5,\ 8,\ \cdots\\ \text{(iii)}\quad n=3,\ 6,\ 9,\ \cdots\end{cases}$ に分けている．

$b_n=2n(n-1)+3$ …① と表せる．

(i) のとき

$$b_n=2(3\ell-2)\{(3\ell-2)-1\}+3$$
$$=2(3\ell-2)\cdot3(\ell-1)+3$$
$$=3\{2(3\ell-2)(\ell-1)+1\}$$

☜ ① に $n=3\ell-2$ を代入した．

であるから $r_n=0$.

(ii) のとき

$$b_n=2(3\ell-1)\{(3\ell-1)-1\}+3$$
$$=2(3\ell-1)(3\ell-2)+3$$
$$=2(3\cdot3\ell^2-3\cdot3\ell+2)+3$$
$$=3(6\ell^2-6\ell+2)+1$$

☜ ① に $n=3\ell-1$ を代入した．

であるから $r_n=1$.

(iii) のとき

$$b_n=2\cdot3\ell(3\ell-1)+3$$
$$=3\{2\ell(3\ell-1)+1\}$$

☜ ① に $n=3\ell$ を代入した．

であるから $r_n=0$.

(i)〜(iii) より

$$r_n=\begin{cases}0\ (n=3\ell-2\ \text{のとき})\\ 1\ (n=3\ell-1\ \text{のとき})\quad(\ell=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\\ 0\ (n=3\ell\quad\ \text{のとき})\end{cases}$$

☜ $\{r_n\}$: $\underset{r_1}{\underset{\parallel}{0}},\ \underset{r_2}{\underset{\parallel}{1}},\ \underset{r_3}{\underset{\parallel}{0}},\ \underset{r_4}{\underset{\parallel}{0}},\ \underset{r_5}{\underset{\parallel}{1}},\ \underset{r_6}{\underset{\parallel}{0}},\ \cdots$

である．

$1000=3\times 333+1$ より

$$\sum_{k=1}^{1000} r_k=(r_1+r_2+r_3)+\cdots+(r_{997}+r_{998}+r_{999})+r_{1000}$$

$$=\sum_{k=1}^{333}(0+1+0)+0$$

$$=\boxed{333}$$

である．

第4問　ベクトル

三角形 OAB において，辺 OA の中点を M，辺 AB を 2:1 に内分する点を N とする．

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OB}$$

である．

点 P を直線 MN 上にとると，実数 s を用いて $\overrightarrow{MP}=s\overrightarrow{MN}$ と表され

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}-\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}s\right)\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}s\overrightarrow{OB}$$

である．さらに，点 P が直線 OB 上にあるものとする．このとき

$$s=\boxed{ス}$$

であり

$$\overrightarrow{OP}=\boxed{セ}\overrightarrow{OB}$$

となる．

以下，$\overrightarrow{OP}=\boxed{セ}\overrightarrow{OB}$ とする．

$OA=3$，$OB=4$，$AB=\sqrt{13}$ とする．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{ソ}$$

である．

点 P を中心とし，点 B を通る円を C とする．直線 OB と円 C の交点のうち B でない方を Q とすると

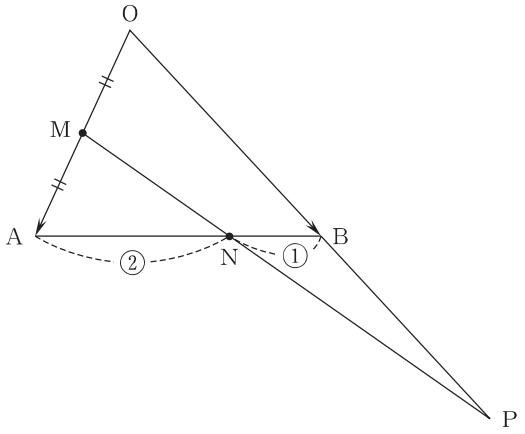
$$\overrightarrow{OQ}=\boxed{タ}\overrightarrow{OB}$$

である．また，直線 AB と円 C の交点のうち B でない方を R とする．実数 t を用いて $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}$ と表すと

$$t=\frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}$$

である．三角形 BQR と三角形 OAB の面積比は $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}:1$ である．

【解説】



$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}.$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\overrightarrow{OB}.$$

☜ **内分点**

線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

点 P を直線 MN 上にとると，実数 s を用いて $\overrightarrow{MP}=s\overrightarrow{MN}$ と表され

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=s(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$$

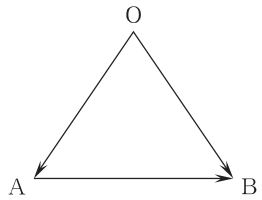
より

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OM}+s\overrightarrow{ON}$$

$$=(1-s)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}-\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}s\right)\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}s\overrightarrow{OB}. \quad \cdots ①$$

☜ **ベクトルの差**



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$

さらに，点 P が直線 OB 上にあるから，$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ により

☜ $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OB}$（$k$ は実数）と表される．

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}s=0$$

$$s=\boxed{3}.$$

① に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\boxed{2}\,\overrightarrow{OB}.$$

$OA=3$，$OB=4$，$AB=\sqrt{13}$ より

$$(\sqrt{13})^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$=4^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+3^2.$$

よって

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2}$$

$$=\boxed{6}.$$

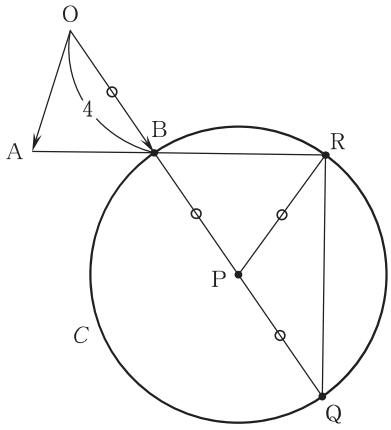
☜ $\cos\angle AOB=\dfrac{3^2+4^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot3\cdot4}$

$=\dfrac{1}{2}$

であるから

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\times4\times\dfrac{1}{2}=6$

としてもよい．



☜ $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OB}$ より，円 C の半径は

$PB=OB=4.$

図より，$\overrightarrow{OQ}=\boxed{3}\overrightarrow{OB}.$

点 R は直線 AB 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}$ と表され

$$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

より

$$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR}&=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}\\&=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OB}\\&=-(t-1)\overrightarrow{OA}+(t-2)\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

点 R は円 C 上にもあるから，$\left|\overrightarrow{PR}\right|=4$ より

$$\left|-(t-1)\overrightarrow{OA}+(t-2)\overrightarrow{OB}\right|^2=4^2$$

$$(t-1)^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2(t-1)(t-2)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(t-2)^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=16$$

$$9(t-1)^2-12(t-1)(t-2)+16(t-2)^2=16$$

☜ $\left|\overrightarrow{OA}\right|=3,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=6,\ \left|\overrightarrow{OB}\right|=4.$

$$13t^2-46t+33=0$$

$$(t-1)(13t-33)=0.$$

図より，$t>1$ であるから

☜ $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}.$

$$t=\frac{\boxed{33}}{\boxed{13}}.$$

以上より

$$\frac{\triangle BQR}{\triangle OAB}=\frac{\frac{1}{2}BQ\cdot BR\sin\angle QBR}{\frac{1}{2}OB\cdot AB\sin\angle OBA}$$

$$=\frac{BQ}{OB}\cdot\frac{BR}{AB}$$

☜ $\angle QBR=\angle OBA.$

$$= 2 \cdot \frac{20}{13}$$

$$= \frac{40}{13}$$

☜ $\mathrm{BQ} = 2\mathrm{OB}$,

$\mathrm{BR} = (t-1)\mathrm{AB} = \frac{20}{13}\mathrm{AB}$.

すなわち

$$\triangle \mathrm{BQR} : \triangle \mathrm{OAB} = \frac{\boxed{40}}{\boxed{13}} : 1$$

である.