セ ン タ ー 模 擬 試 験

第５回　数学　ＩＡ

解説と解答

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{8}$	3	
	$\frac{ウ\sqrt{エ}}{オ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{8}$	3	
	$\frac{カキ\sqrt{ク}}{ケ}$	$\frac{15\sqrt{7}}{4}$	3	
	$\frac{コ\sqrt{サ}}{シ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{2}$	3	
	$\frac{ス}{セ}$	$\frac{1}{2}$	3	
	ソタ°	90°	2	
	$\frac{\sqrt{チ}}{ツ}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	3	
	テ.ト	6.0	3	
	ナ.ニヌ	4.40	3	
	ネ	8	2	
	ノ	1	2	
	ハ	3	3	
	ヒ.フ	4.0	2	
第1問 自己採点小計			(35)	
第2問	アa	$3a$	2	
	イa^2－ウa－エ	$2a^2-2a-4$	2	
	a＜オカ，キ＜a	$a<-1$，$2<a$	3	
	$\frac{ク-ケ\sqrt{コ}}{11}$	$\frac{1-3\sqrt{5}}{11}$	3	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{1}{3}$	3	
	スセa^2－ソa－タ	$11a^2-8a-3$	3	
	チa^2－ツa－テ	$2a^2-2a-4$	3	
	$a<-\frac{ト}{ナニ}$	$a<-\frac{3}{11}$	3	
	ヌ＜a	$2<a$	3	
第2問 自己採点小計			(25)	
第3問	アイ	24	2	
	ウエ	12	2	
	オ	4	2	
	カ	4	2	
	キクケ	144	3	
	コ	3	2	
	$\frac{サ}{シス}$	$\frac{1}{12}$	3	
	$\frac{セ}{ソタ}$	$\frac{2}{11}$	4	
第3問 自己採点小計			(20)	
第4問	(ア，イウ)	(4，41)	2	
	(エ，オ)	(3，1)	2	
	カ	1 ※	2	
	キ	2 ※	2	
	クケ	−1	2	
	(コ，サシ)	(3，13)	3	
	(スセソ，タチツ)	(127，550)	3	
	テト	16	2	
	ナニ	17	2	
第4問 自己採点小計			(20)	

※の正解は順序を問わない．

第１問　図形と計量，データの分析

〔１〕 △ABC において，AB＝4，BC＝5，CA＝6 とする．このとき

$$\cos\angle ABC=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \sin\angle ABC=\frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

であり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{カキ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

点 A から辺 BC に垂線を下ろし，垂線と辺 BC との交点を D とすると

$$AD=\frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}},\quad BD=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である．

さらに，直線 AD と △ABC の外接円との交点のうち A と異なる方を E とし，辺 AB 上に点 F を ∠BCF＝∠BCE となるようにとる．また，線分 CF と線分 AE の交点を G とする．このとき

$$\angle BFC=\boxed{ソタ}^\circ$$

であり，△DFG の外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ である．

〔２〕 次のデータは，A から J までの 10 人の生徒に対して行った二つのゲームの得点の結果である．ゲームの得点は 0 以上の整数値である．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム 1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5
ゲーム 2	6	X	3	3	4	0	3	7	Y	2

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

(1) ゲーム 1 の得点のデータの平均値は $\boxed{テ}.\boxed{ト}$ 点であり，分散は $\boxed{ナ}.\boxed{ニヌ}$ である．

(2) X＞Y とする．ゲーム 2 の得点のデータの範囲(レンジ)が 8 点であるとすると

$$X=\boxed{ネ}$$

であり，さらに平均値が 3.7 点であるとすると

$$Y=\boxed{ノ}$$

である．

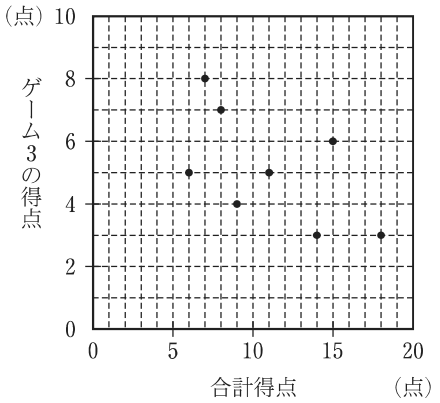
(3) X＝$\boxed{ネ}$，Y＝$\boxed{ノ}$ とする．

ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点の上位 8 人でゲーム 3 を行った．ただし，ゲーム 3 の得点は整数値である．

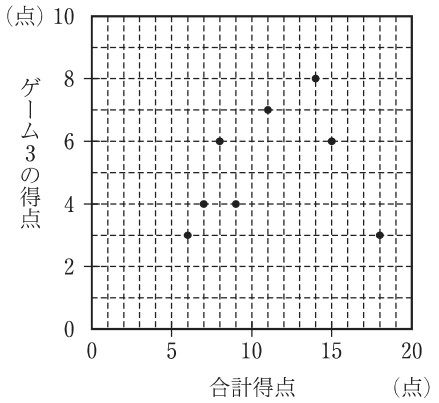
ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点とゲーム 3 の得点の相関係数が −0.86 であるとすると，散布図として適切なものは $\boxed{ハ}$ であり，ゲーム 3 のデータの中央値は $\boxed{ヒ}.\boxed{フ}$ 点である．

ハ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

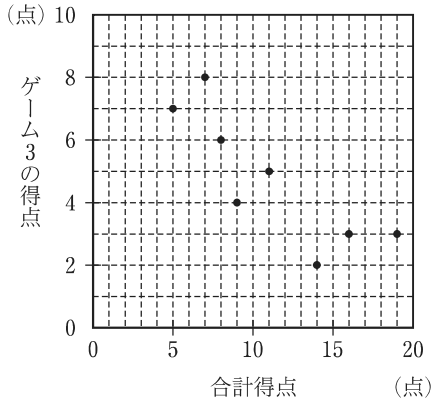
⓪



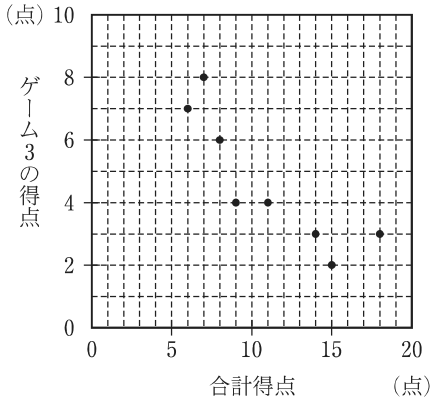
①



②

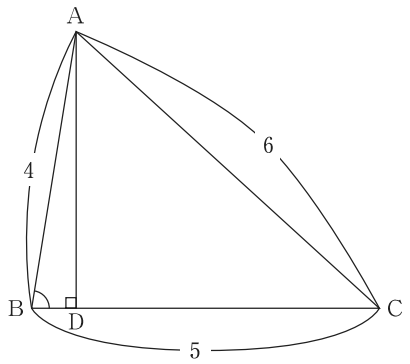


③



【解説】

〔1〕



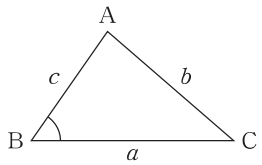
余弦定理より，

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}$$

$$= \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}$$

$$= \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

☞ **余弦定理**



$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

である．

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{8}}$$

☜ $0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

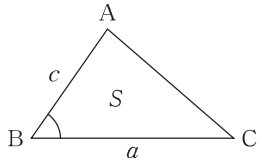
である．

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$=\frac{\boxed{15}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}$$

☜ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$

である．

直角三角形 ABD に着目すると，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}$$

$$=4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

☜ $\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$.

であり，

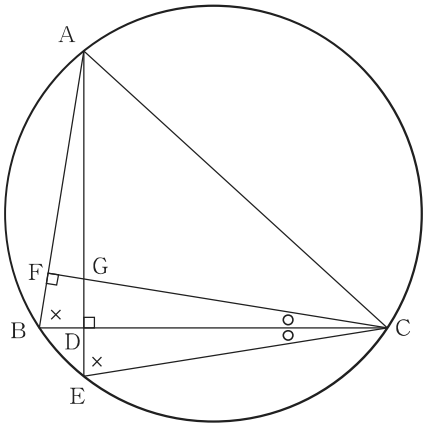
$$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{ABC}$$

$$=4\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

☜ $\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}$.

である．



条件より，

$$\angle\mathrm{BCF}=\angle\mathrm{BCE}$$

☜ 図の ○ 印.

である．

また，円周角の定理より，

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{AEC}$$

☜ 図の × 印.

であるから，

$$\triangle \mathrm{BCF} \backsim \triangle \mathrm{ECD}$$

であり，

$$\angle \mathrm{BFC} = \angle \mathrm{EDC}$$

$$= \boxed{90}^\circ$$

☜ $\mathrm{AE} \perp \mathrm{BC}$.

である．

直角三角形 BCF に着目して，

$$\mathrm{BF} = \mathrm{BC} \cos \angle \mathrm{FBC}$$

☜ $\cos \angle \mathrm{FBC} = \dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BC}}$.

$$= 5 \cdot \frac{1}{8}$$

☜ $\cos \angle \mathrm{FBC} = \cos \angle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{8}$.

$$= \frac{5}{8}$$

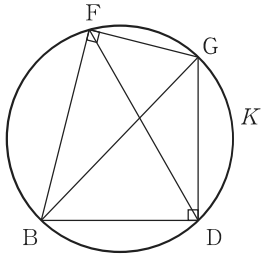
である．

△DFG の外接円を K とする．

$$\angle \mathrm{BDG} = \angle \mathrm{BFG} = 90^\circ$$

であるから，四角形 BDGF は円 K に内接する．

☜



△BDF に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{DF}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{BF}^2 - 2\mathrm{BD} \cdot \mathrm{BF} \cos \angle \mathrm{FBD}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{8}$$

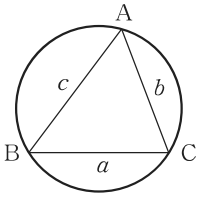
$$= \frac{9}{16}$$

であるから，

$$\mathrm{DF} = \frac{3}{4}$$

である．

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

（R は外接円の半径）

△BDF の外接円も K であるから，その半径を R とし，△BDF に正弦定理を用いると，

$$2R = \frac{\mathrm{DF}}{\sin \angle \mathrm{FBD}}$$

☜

$$R = \frac{\frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}}$$

☜ $\sin \angle \mathrm{FBD} = \sin \angle \mathrm{ABC} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

$$= \frac{\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{7}}$$

である．

〔2〕

(1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5

ゲーム1のデータの平均値は，

$$\frac{8+10+3+6+7+4+5+8+4+5}{10}$$

$$=\frac{60}{10}$$

$$=\boxed{6}.\boxed{0}\ (\text{点})$$

である．

また，ゲーム1のデータの分散は，

$$\frac{1}{10}\{(8-6)^2+(10-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2$$
$$+(4-6)^2+(5-6)^2+(8-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2\}$$

$$=\frac{44}{10}$$

$$=\boxed{4}.\boxed{40}$$

である．

平均値

変量 x についてのデータの値が，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n であるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

偏差・分散

変量 x についてのデータの値を x_1，x_2，…，x_n とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，…，$x_n-\overline{x}$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，(これら)偏差の2乗の平均値が x の分散 s^2 となる．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

(2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム2	6	X	3	3	4	0	3	7	Y	2

ゲーム2のデータの最小値は0であり，範囲(レンジ)が8であるから，

ゲーム2のデータの最大値は8

である．

よって，X＞Y を考慮すると，

$$\mathsf{X}=\boxed{8}$$

である．

このとき，ゲーム2のデータの平均値は，

$$\frac{6+8+3+3+4+0+3+7+\mathsf{Y}+2}{10}=\frac{36+\mathsf{Y}}{10}\ (\text{点})$$

であり，この値が3.7であるから，

$$\frac{36+\mathsf{Y}}{10}=3.7$$

すなわち

$$\mathsf{Y}=\boxed{1}$$

である．

範囲(レンジ)

データの最大値と最小値の差を範囲(レンジ)という．すなわち，

(範囲)＝(最大値)－(最小値)．

(3) $X=8$，$Y=1$ のとき，ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点は下の表のようになる．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム 1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5
ゲーム 2	6	8	3	3	4	0	3	7	1	2
合計得点	14	18	6	9	11	4	8	15	5	7

合計得点の上位 8 人のデータを得点の小さい方から順に並べると，

6，7，8，9，11，14，15，18

となる．

散布図②は，合計得点の最小値が 5，最大値が 19 であり，不適である．

また，散布図①は，正の相関があり，相関係数 -0.86 に反する．

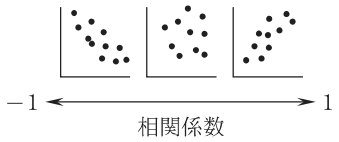
さらに，散布図⓪と③では，③の方が負の相関がかなり強く，相関係数 -0.86 の散布図としては③の方が適切である．よって，［ハ］に当てはまるものは［③］である．

☜ 散布図⓪の相関係数を実際に計算すると，

-0.59

となる．

散布図と相関係数



散布図③のゲーム 3 の得点は下の表のようになる．

合計得点	6	7	8	9	11	14	15	18
ゲーム 3	7	8	6	4	4	3	2	3

ゲーム 3 のデータを得点の小さい方から順に並べると，

2，3，3，4，4，6，7，8

となり，中央値は，

$$\frac{4+4}{2}=\boxed{4}.\boxed{0}\ (\text{点})$$

である．

☜ **中央値**

データを値の大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．データの大きさが偶数のときは，中央に並ぶ 2 つの値の平均値を中央値とする．

第2問　2次関数

a を定数として x の2次関数

$$y=x^2-6ax+11a^2-2a-4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える．関数①のグラフ G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}a,\ \boxed{\text{イ}}a^2-\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

(1)　G が x 軸と共有点を持たないような a の値の範囲は

$$a<\boxed{\text{オカ}},\quad \boxed{\text{キ}}<a$$

であり，G が y 軸の負の部分と共有点を持つような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{11}<a<\frac{\boxed{\text{ク}}+\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{11}$$

である．

(2)　関数①の $x\geqq 1$ における最小値を m とする．

$$a<\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\ \text{のとき}\quad m=\boxed{\text{スセ}}a^2-\boxed{\text{ソ}}a-\boxed{\text{タ}}$$

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\leqq a\ \text{のとき}\quad m=\boxed{\text{チ}}a^2-\boxed{\text{ツ}}a-\boxed{\text{テ}}$$

であり，$m>0$ となるような a の値の範囲は

$$a<-\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}},\quad \boxed{\text{ヌ}}<a$$

である．

【解説】

$$f(x)=x^2-6ax+11a^2-2a-4$$

とおく．

$$f(x)=(x-3a)^2+2a^2-2a-4$$

であるから，G の頂点の座標は，

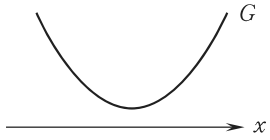
$$\left(\boxed{3}a,\ \boxed{2}a^2-\boxed{2}a-\boxed{4}\right)$$

である．

☜ 放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，

$$(q,\ r).$$

(1)　下に凸である放物線 G が x 軸と共有点を持たないのは，頂点の y 座標が正のときであるから，☜



（頂点が x 軸より上側にある）

$$2a^2-2a-4>0$$

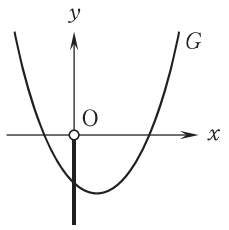
$$2(a+1)(a-2)>0$$

より，

$$a<\boxed{-1},\quad \boxed{2}<a$$

である．

また，G が y 軸の負の部分と共有点を持つような a の値の範囲は，



$$f(0)<0$$
$$11a^2-2a-4<0$$

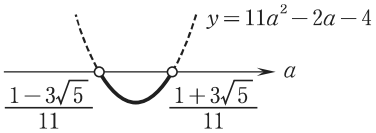
より，

$$\frac{\boxed{1}-\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{11}<a<\frac{1+3\sqrt{5}}{11}$$

である．

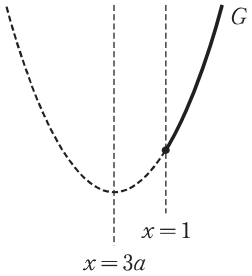
$11a^2-2a-4=0$ を解くと，

$$a=\frac{1\pm3\sqrt{5}}{11}.$$



(2)　$3a<1$ すなわち $a<\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ のとき，

$$m=f(1)$$
$$=\boxed{11}a^2-\boxed{8}a-\boxed{3}.$$

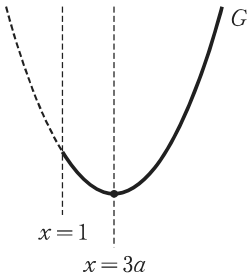


$3a\geqq1$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq a$ のとき，

$$m=f(3a)$$
$$=\boxed{2}a^2-\boxed{2}a-\boxed{4}.$$

$a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$m>0$ とすると，

$$11a^2-8a-3>0$$
$$(11a+3)(a-1)>0$$
$$a<-\frac{3}{11},\ 1<a$$



であり，$a<\dfrac{1}{3}$ より，

$$a<-\frac{3}{11}\qquad\cdots②$$

である．

$\dfrac{1}{3}\leqq a$ のとき，$m>0$ とすると，

$$2a^2-2a-4>0$$
$$2(a+1)(a-2)>0$$
$$a<-1,\quad 2<a$$

であり，$\dfrac{1}{3}\leqq a$ より，

$$2<a\qquad\cdots③$$

である．

②，③ より，$m>0$ となるような a の値の範囲は，

$$a<-\frac{\boxed{3}}{\boxed{11}},\quad \boxed{2}<a$$

である．

第3問　場合の数・確率

(1)　白色と黒色のカードが1枚ずつと赤色のカードが2枚あり，赤色のカードの一方には1，他方には2と番号がつけられている．この4枚のカードを横一列に並べる．

並べ方は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，そのうち白色と黒色のカードが隣り合っているものは $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りである．また，白色と黒色のカードの間に，番号1の赤色のカードだけがはさまっているものは $\boxed{\text{オ}}$ 通りであり，番号1と番号2の赤色のカードがともにはさまっているものは $\boxed{\text{カ}}$ 通りである．

(2)　箱の中に1から4までの番号がつけられた4枚の赤色のカードが入っている．この箱の中から2枚のカードを取り出し，白色と黒色のカードを1枚ずつ加えた合計4枚のカードを横一列に並べる．カードの並べ方は全部で $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある．

カードの並びにより，次のように得点を定める．

・白色と黒色のカードが隣り合っているときは，得点を0点とする．

・白色と黒色のカードの間に赤色のカードがはさまっているときは

はさまっているカードの枚数を x

とし，さらに

$x=1$ ならば，$y=$（はさまっているカードの番号）

$x=2$ ならば，$y=$（はさまっている2枚のカードの大きい方の番号）

とし，得点を $y-x$ 点とする．

このとき，最高得点は $\boxed{\text{コ}}$ 点であり，得点が $\boxed{\text{コ}}$ 点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．

また，得点が0点であるという条件の下で，白色と黒色のカードが隣り合っていない条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である．

【解説】

(1)　白色のカードを $\boxed{\text{W}}$，黒色のカードを $\boxed{\text{B}}$，番号1の赤色のカードを $\boxed{\text{R1}}$，番号2の赤色のカードを $\boxed{\text{R2}}$ と表す．

4枚のカードの並べ方は全部で，

$$4! = \boxed{24} \text{（通り）}$$

ある．

白色と黒色のカードが隣り合うようなカードの並べ方は，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の組を1枚と考えて $\boxed{}$ と表すと，$\boxed{}$，$\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$ の3枚の並べ方が，

$$3! \text{ 通り}$$

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の並べ方が，

$2!$ 通り

☜ $\boxed{W}\boxed{B}$ と $\boxed{B}\boxed{W}$.

あるから，

$$3! \times 2! = \boxed{12} \text{（通り）} \quad \cdots ①$$

である．

白色と黒色のカードの間に，番号 1 の赤色のカードだけがはさまっているようなカードの並べ方は，$\boxed{W}$ と $\boxed{B}$ と $\boxed{R1}$ の組を 1 枚と考えて $\boxed{\quad}\boxed{R1}\boxed{\quad}$ と表すと，$\boxed{\quad}\boxed{R1}\boxed{\quad}$，$\boxed{R2}$ の 2 枚の並べ方が，

$2!$ 通り

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{W}$ と $\boxed{B}$ の並べ方が，

$2!$ 通り

☜ $\boxed{W}\boxed{R1}\boxed{B}$ と $\boxed{B}\boxed{R1}\boxed{W}$.

あるから，

$$2! \times 2! = \boxed{4} \text{（通り）} \quad \cdots ②$$

である．

白色と黒色のカードの間に，番号 1 と番号 2 の赤色のカードがともにはさまっているような並べ方は，まず，両端に $\boxed{W}$ と $\boxed{B}$ を並べる方法が，

$2!$ 通り

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{R1}$ と $\boxed{R2}$ の並べ方が，

$2!$ 通り

あるから，

$$2! \times 2! = \boxed{4} \text{（通り）} \quad \cdots ③$$

である．

(2) 白色のカードを $\boxed{W}$，黒色のカードを $\boxed{B}$，番号 1，2，3，4 の赤色のカードをそれぞれ $\boxed{R1}$，$\boxed{R2}$，$\boxed{R3}$，$\boxed{R4}$ と表す．

箱の中から 2 枚のカードを取り出す方法は，

${}_4C_2$ 通り

あり，その 2 枚と白色と黒色のカードを 1 枚ずつ加えた合計 4 枚のカードを横一列に並べる方法は，

☜ たとえば，箱の中から取り出した 2 枚の赤色のカードを $\boxed{R1}$，$\boxed{R3}$ とすると，4 枚のカード $\boxed{R1}$，$\boxed{R3}$，$\boxed{W}$，$\boxed{B}$ を横一列に並べる．

$4!$ 通り

ある．

よって，カードの並べ方は全部で，

$${}_4C_2 \times 4! = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= \boxed{144} \text{（通り）}$$

あり，これらの並べ方は同様に確からしい．

与えられた条件から得点に関して次の表を得る．

（ただし，白色と黒色のカードが隣り合っているときは $x=y=0$ とする.）

x	0	1	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	3	4	2	3	4
得点 $(y-x)$	0	0	1	2	3	0	1	2

表より，最高得点は $\boxed{3}$ 点である.

得点が 3 点になるのは，

「箱の中から $\boxed{\text{R4}}$ が取り出され，さらに，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R4}}$ だけがはさまっているとき」

である.

箱の中から $\boxed{\text{R4}}$ を含んだ 2 枚を取り出す方法は，

$${}_3\mathrm{C}_1 \text{ 通り}$$

☜ $\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$，$\boxed{\text{R3}}$ から 1 枚.

あり，さらに白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R4}}$ だけをはさんで並べる並べ方は，② のときと同様に考えて，

$$2!\times 2!=4 \text{（通り）}$$

☜ たとえば，箱の中から取り出した 2 枚の赤色のカードを $\boxed{\text{R4}}$，$\boxed{\text{R1}}$ とすると，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ と $\boxed{\text{R4}}$ の組を 1 枚と考えて，$\boxed{\text{R4}}$ と表す. $\boxed{\text{R4}}$ と $\boxed{\text{R1}}$ を並べる方法は 2! 通りあり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の並べ方が 2! 通りある.

ある.

よって，得点が 3 点になる並べ方は，

$${}_3\mathrm{C}_1\times 4=12 \text{（通り）}$$

であるから，その確率は，

$$\frac{12}{144}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{12}}$$

である.

ここで，2 つの事象 E，F を，

E：「得点が 0 点である」

F：「白色と黒色のカードが隣り合っていない」

とする.

得点が 0 点になるのは，表より，次の 3 つの場合がある.

(i) $x=0$，$y=0$，つまり，白色と黒色のカードが隣り合っているとき.

(ii) $x=1$，$y=1$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R1}}$ だけをはさんで並べるとき.

(iii) $x=2$，$y=2$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$ をはさんで並べるとき.

(i) のとき.

箱の中から 2 枚を取り出す方法は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあり，そのそれぞれに対して白色と黒色のカードが隣り合っている並べ方は，① のときと同様に考えて，$3!\times 2!=12$（通り）あるから，

(i) の並べ方は，

$$ {}_4C_2 \times 12 = 72 \text{（通り）} $$

である．

(ii) のとき．

得点が 3 点になる場合のときと同様に考えて，(ii) の並べ方は，

$$ {}_3C_1 \times 4 = 12 \text{（通り）} $$

である．

(iii) のとき．

箱の中から $\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$ を取り出す方法は 1 通りあり，その 1 通りに対して白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$ をはさんで並べる方法は，③ より 4 通りあるから，(iii) の並べ方は，

$$ 1 \times 4 = 4 \text{（通り）} $$

である．

したがって，得点が 0 点となる確率は，(i)，(ii)，(iii) より，

$$ P(E) = \frac{72+12+4}{144} $$

$$ = \frac{88}{144} $$

である．

また，$E \cap F$ は，

「得点が 0 点であり，かつ白色と黒色のカードが隣り合っていない」

という事象であり，(ii) または (iii) のときであるから，その確率は，

$$ P(E \cap F) = \frac{12+4}{144} $$

$$ = \frac{16}{144} $$

である．

ゆえに，得点が 0 点であるという条件の下で，白色と黒色のカードが隣り合っていない条件付き確率は，

$$ P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} $$

$$ = \frac{\frac{16}{144}}{\frac{88}{144}} $$

$$ = \frac{\boxed{2}}{\boxed{11}} $$

である．

☜ **条件付き確率**

事象 A が起こったという条件の下で事象 B が起こる確率を，事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率といい，$P_A(B)$ と表す．

$$ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. $$

第4問　整数の性質

(1)　$a=537$，$b=124$ とする．a を b で割ったときの商と余りをそれぞれ q_1，r_1 とし，b を r_1 で割ったときの商と余りをそれぞれ q_2，r_2 とすると

$$(q_1,\ r_1)=(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}),\quad (q_2,\ r_2)=(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$$

であり，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ である．

$\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，$\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ の解答の順序は問わない．

⓪　a は b の倍数である　　①　a と b は互いに素である

②　$aq_2-b(q_1q_2+1)=-r_2$ が成り立つ　　③　$aq_2r_2=bq_1r_1$ が成り立つ

(2)　537 で割ると 2 余り，124 で割ると 1 余る自然数 n について考えよう．

n を 537，124 で割ったときの商をそれぞれ x，y とすると

$$537x-124y=\boxed{\text{クケ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ち，① を満たす商 x，y の組を x の値が小さい方から順に二つ書くと

$$(x,\ y)=(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サシ}}),\ (\boxed{\text{スセソ}},\ \boxed{\text{タチツ}})$$

である．

n のとり得る値を小さい方から順に n_1，n_2，n_3，… とする．$2^k<n_2<2^{k+1}$ を満たす整数 k は $\boxed{\text{テト}}$ であるから，n_2 を 2 進法で表すと $\boxed{\text{ナニ}}$ 桁（けた）となる．

【解説】

(1)

$$537=124\cdot 4+41$$

より，537 を 124 で割ったときの商と余りはそれぞれ 4，41 であるから，

$$(q_1,\ r_1)=(\boxed{4},\ \boxed{41})$$

であり，

$$124=41\cdot 3+1$$

より，124 を 41 で割ったときの商と余りはそれぞれ 3，1 であるから，

$$(q_2,\ r_2)=(\boxed{3},\ \boxed{1})$$

である．

よって，

$$\begin{aligned}&(a\text{ と }b\text{ の最大公約数})\\ =&(b\text{ と }r_1\text{ の最大公約数})\\ =&(r_1\text{ と }r_2\text{ の最大公約数})\\ =&(41\text{ と }1\text{ の最大公約数})\\ =&1\end{aligned}$$

より，a と b は互いに素である．

☜　整数 m と正の整数 n に対して，

$$\begin{cases} m=nq+r, \\ 0\leqq r<n \end{cases}$$

を満たす整数 q と整数 r はただ 1 通りに定まる．

q は m を n で割ったときの商，

r は m を n で割ったときの余り

という．

☜　2 つの自然数 m，n について，m を n で割ったときの余りを r とすると，

$$\begin{pmatrix} m\text{ と }n\text{ の} \\ \text{最大公約数} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n\text{ と }r\text{ の} \\ \text{最大公約数} \end{pmatrix}.$$

このことを利用して，左のように最大公約数を求める方法を互除法という．

ゆえに，⓪は誤り，①は正しい．

また，

$$a=bq_1+r_1,\quad b=r_1q_2+r_2$$

より，r_1 を消去すると，

$$b=(a-bq_1)q_2+r_2$$

すなわち

$$aq_2-b(q_1q_2+1)=-r_2$$

となるから，②は正しい．

さらに，

$$aq_2r_2=537\cdot3\cdot1<124\cdot4\cdot41=bq_1r_1$$

であるから，③は誤り．

したがって，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ と $\boxed{②}$ である．

(2)

$$n=537x+2,\quad n=124y+1$$

が成り立つから，n を消去すると，

$$537x+2=124y+1$$

すなわち

$$537x-124y=\boxed{-1} \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．

また，(1) より，

$$aq_2-b(q_1q_2+1)=-r_2$$

であるから，

$$537\cdot3-124(4\cdot3+1)=-1$$

すなわち

$$537\cdot3-124\cdot13=-1 \qquad \cdots ②$$

☜ $(x,\ y)=(3,\ 13)$ は ① の整数解の一つである．

が成り立つ．

①−② より，

$$537(x-3)-124(y-13)=0$$

すなわち

$$537(x-3)=124(y-13) \qquad \cdots ③$$

である．

537 と 124 は互いに素であるから，$x-3$ は 124 の倍数であり，ℓ を整数として，

$$x-3=124\ell$$

と表される．

これを ③ に代入すると，

$$537\cdot124\ell=124(y-13)$$

$$y-13=537\ell$$

となるから，① の整数解は，

$$(x,\ y)=(124\ell+3,\ 537\ell+13)\ (\ell \text{ は整数})$$

である．

n が自然数のとき，x，y は 0 以上の整数であるから ℓ は 0 以上の整数であり，x の値が小さい方から順に二つ書くと，$\ell=0$，1 として，

$$(x,\ y)=(\boxed{3},\ \boxed{13}),\ (\boxed{127},\ \boxed{550})$$

である．

n_2 は $x=127$ のときの n であるから，

$$\begin{aligned} n_2 &= 537\cdot 127+2 \\ &= 68201 \end{aligned}$$

である．

ここで，

$$2^{16}=65536,\quad 2^{17}=131072$$

であるから，$2^k<n_2<2^{k+1}$ を満たす整数 k は $\boxed{16}$ であり，

n_2 を 2 進法で表すと $\boxed{17}$ 桁となる．　☜ 下の(**注**)参照．

(**注**)　正の整数 N を 2 進法で表したときの桁数が m のとき，

$$1\cdot 2^{m-1}+0\cdot 2^{m-2}+0\cdot 2^{m-3}+\cdots+0\cdot 1\leqq N<1\cdot 2^{m}+0\cdot 2^{m-1}+0\cdot 2^{m-2}+\cdots+0\cdot 1$$

すなわち

$$2^{m-1}\leqq N<2^{m}$$

が成り立つ．