時習館高等部 センター講座

センター模擬試験

第４回　数学　ⅡＢ

解説と解答

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	2，1	2	
	ウ，エ，オ	2，1，1	2	
	カ	0	1	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{2}{3}$	1	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{4}{3}$	1	
	$\frac{\sqrt{サシ}}{ス}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$	2	
	$\frac{セソ}{タ}$	$\frac{-9}{8}$	2	
	チ	0	2	
	ツ	4	3	
	テ	1	2	
	ト，ナ	5，6	2	
	ニ，ヌ，ネ	1，2，3	3	
	ノハ	−2	2	
	$\frac{ヒ}{フ}$	$\frac{9}{2}$	2	
	ヘ	2	3	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イ	−，4	2	
	ウ	0	1	
	エオ	−3	2	
	カ	4	1	
	$\frac{キク}{ケ}$	$\frac{23}{3}$	2	
	コ	6	3	
	サ	3	2	
	シ	3	2	
	ス，$\frac{セソ}{タ}$	1，$\frac{-4}{3}$	3	
	$\frac{チツ}{テ}$	$\frac{13}{3}$	2	
	$\frac{トナ}{ニ}$，ヌ，ネ	$\frac{-1}{3}$，5，6	4	
	ノ	3	3	
	ハヒ，フ	20，7	3	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア	2	2	
	イ	3	2	
	ウ	8	3	
	エ，オ，カ	3，2，1	3	
	キ，ク	5，4	2	
	$\frac{ケ}{コ}$，$\frac{サ}{シ}$	$\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}$	2	
	スセソ	106	3	
	タチツテト	25513	3	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\dfrac{ア}{イ}$	$\dfrac{1}{2}$	2	
	$\dfrac{ウ}{エ}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	$\dfrac{オ}{カ}$, $\dfrac{キ}{ク}$	$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$	2	
	ケ	1	1	
	コ	1	1	
	$\dfrac{サ}{シ}$, $\dfrac{ス}{セ}$	$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{4}{3}$	2	
	$\dfrac{ソ}{タ}$	$\dfrac{1}{6}$	3	
	チ	2	2	
	$\dfrac{ツ}{テ}$, $\dfrac{ト}{ナ}$	$\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{4}{9}$	3	
	$\dfrac{ニ\sqrt{ヌ}}{ネ}$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$	2	
	第4問　自己採点小計		(20)	

第 1 問　三角関数，指数関数・対数関数

〔1〕 $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，θ の関数 $f(\theta) = \cos 2\theta - \cos\theta$ を考える．

$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}}\cos^2\theta - \boxed{\text{イ}}$ であるから，$\cos\theta = t$ とすると，$f(\theta)$ は t を用いて

$$f(\theta) = \boxed{\text{ア}}t^2 - t - \boxed{\text{イ}}$$

と表される．

(1) $$f(\theta) = \left(\boxed{\text{ウ}}t + \boxed{\text{エ}}\right)\left(t - \boxed{\text{オ}}\right)$$

と変形できるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式 $f(\theta) = 0$ を解くと

$$\theta = \boxed{\text{カ}},\quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である．ただし，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} < \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ とする．

(2) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ の最小値を与える θ のうち，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるものを α とすると

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

(3) k を実数とする．$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，θ の方程式 $f(\theta) = k$ が異なる 4 個の実数解をもつような k の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}} < k < \boxed{\text{チ}}$$

であり，この 4 個の実数解の和は $\boxed{\text{ツ}}\pi$ である．

〔2〕 x の不等式

$$2\log_2(x-1) \leqq \log_2(2x^2 - 7x + 7) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

について考える．

すべての実数 x に対して $2x^2 - 7x + 7 > 0$ であるから，真数が正となるような x の値の範囲は $x > \boxed{\text{テ}}$ である．この条件のもとで，(*) を変形すると

$$x^2 - \boxed{\text{ト}}x + \boxed{\text{ナ}} \geqq 0$$

となるから，(*) を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ニ}} < x \leqq \boxed{\text{ヌ}},\quad \boxed{\text{ネ}} \leqq x$$

である．

次に，x の不等式

$$\frac{1}{4} < 2^x < 16\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

を解くと

$$\boxed{ノハ} < x < \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$$

である．

(*) かつ (**) を満たす x のうちで，$\log_{\sqrt{3}} x$ が整数となるような x の値は $\boxed{ヘ}$ 個ある．

【解説】

〔1〕
$$f(\theta) = \cos 2\theta - \cos\theta.$$

$\cos 2\theta = \boxed{2}\cos^2\theta - \boxed{1}$ であるから，$\cos\theta = t$ とする ☜ と，$f(\theta)$ は t を用いて

$$f(\theta) = (2t^2 - 1) - t$$
$$= 2t^2 - t - 1$$

と表される．

2倍角の公式

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta.$$

(1)
$$f(\theta) = 2t^2 - t - 1$$
$$= \left(\boxed{2}t + \boxed{1}\right)\left(t - \boxed{1}\right)$$

と変形できるから，$f(\theta) = 0$ は

$$(2t+1)(t-1) = 0$$

と表される．これより

$$t = 1,\ -\frac{1}{2}$$

すなわち

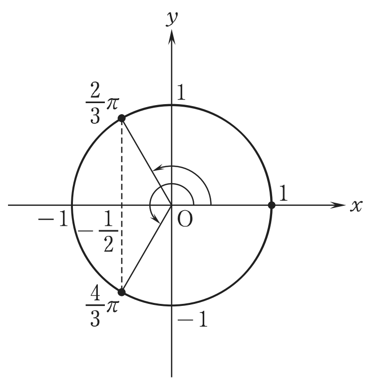
$$\cos\theta = 1,\ -\frac{1}{2}$$

であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において $f(\theta) = 0$ の解は

$$\theta = \boxed{0},\quad \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi,\quad \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\pi$$

である．

☜



(2) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は $-1 \leqq t \leqq 1$ であり

$$f(\theta) = 2t^2 - t - 1$$
$$= 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

であるから，$f(\theta)$ が最小値をとるのは

$$t = \frac{1}{4} \quad すなわち \quad \cos\theta = \frac{1}{4}$$

のときである．これを満たす θ のうち，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるものが α であるから

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

である．このとき，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\alpha>0$ に注意すると

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

☜ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$

である．よって

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\&=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{8}}\end{aligned}$$

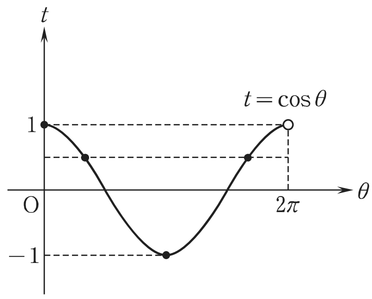
☜ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

である．

(3) t の値が 1 個決まったとき，$0\leqq\theta<2\pi$ において，$t=\cos\theta$ を満たす θ の値は

$$\begin{cases}-1<t<1\ のとき， & 2\ 個\\ t=\pm 1\ のとき， & 1\ 個\\ t<-1,\ 1<t\ のとき， & 0\ 個\end{cases}$$

☜



存在する．よって，$0\leqq\theta<2\pi$ において，θ の方程式 $f(\theta)=k$ が異なる 4 個の実数解をもつ条件は，t の方程式

$$2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}=k \quad \cdots ①$$

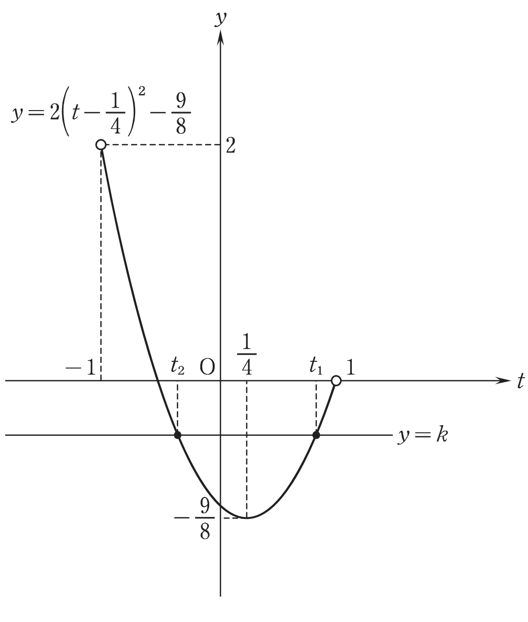
☜ $f(\theta)=2t^2-t-1$
$=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}.$

が $-1<t<1$ の範囲に異なる 2 個の実数解をもつことである．

このような実数 k の値の範囲は，下のグラフより

$$\frac{\boxed{-9}}{\boxed{8}}<k<\boxed{0}$$

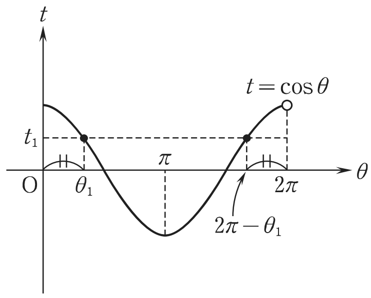
である．



① の 2 個の実数解を t_1，t_2 とする．

$$t_1=\cos\theta$$

を満たす 2 個の θ の値のうち，小さい方を θ_1 とすると，大きい方は $2\pi-\theta_1$ である．よって，これらの値の和は 2π である．同様にして $t_2=\cos\theta$ を満たす 2 個の θ の値の和も 2π である．よって，$0\leqq\theta<2\pi$ における θ の方程式 $f(\theta)=k$ の異なる 4 個の実数解の和は $\boxed{4}\pi$ である．

☜ 

［2］ $$2\log_2(x-1)\leqq\log_2(2x^2-7x+7). \qquad \cdots(*)$$

すべての実数 x に対して $2x^2-7x+7>0$ であるから，真数が正となるような x の値の範囲は $x-1>0$ より

☜ $2x^2-7x+7=2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0.$

$$x>\boxed{1} \qquad \cdots ①$$

である．この条件のもとで (*) を変形すると

$$\log_2(x-1)^2\leqq\log_2(2x^2-7x+7)$$

☜ $a>0$，$a\neq1$，$M>0$，p が実数のとき $p\log_a M=\log_a M^p.$

となる．底 2 は 1 より大きいから

$$(x-1)^2\leqq 2x^2-7x+7$$

☜ $a>1$，$M>0$，$N>0$ のとき $\log_a M\leqq\log_a N \iff M\leqq N.$

$$x^2-\boxed{5}x+\boxed{6}\geqq0$$

$$(x-2)(x-3)\geqq0$$

$$x\leqq2,\quad 3\leqq x \qquad \cdots ②$$

となる．よって，① かつ ② から，(*) を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{1}<x\leqq\boxed{2},\quad \boxed{3}\leqq x$$

である．次に，x の不等式

$$\frac{1}{4}<2^x<16\sqrt{2} \qquad \cdots(**)$$

を変形すると

$$2^{-2}<2^x<2^{\frac{9}{2}}$$

☜ $16\sqrt{2}=2^4\cdot2^{\frac{1}{2}}=2^{4+\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{2}}.$

となり，底 2 は 1 より大きいから

$$\boxed{-2}<x<\frac{\boxed{9}}{\boxed{2}}$$

☜ $a>1$ のとき $a^M<a^N \iff M<N.$

である．

以上より，(*) かつ (**) を満たす x の値の範囲は

$$1<x\leqq2,\quad 3\leqq x<\frac{9}{2} \qquad \cdots ③$$

である．ここで，$\log_{\sqrt{3}}x=n$ とおくと

$$x=(\sqrt{3})^n$$

☜ $a>0$，$a\neq1$，$R>0$ のとき $\log_a R=r \iff R=a^r.$

である．また，$\sqrt{3}>1$ であるから

$$\cdots < (\sqrt{3})^{-1} < (\sqrt{3})^0 < (\sqrt{3})^1 < (\sqrt{3})^2 < (\sqrt{3})^3 < \cdots$$

$$\begin{array}{ccccc} (\sqrt{3})^{-1} & (\sqrt{3})^0 & (\sqrt{3})^1 & (\sqrt{3})^2 & (\sqrt{3})^3 \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \sqrt{3} & 3 & 3\sqrt{3} \end{array}$$

が成り立つ．よって，③ を満たす x のうちで，$\log_{\sqrt{3}} x\ (=n)$ が整数となるような x の値は

$$(\sqrt{3})^1 = \sqrt{3},\quad (\sqrt{3})^2 = 3$$

の $\boxed{\ 2\ }$ 個である．

☜ $(\sqrt{3})^0 = 1$,

$\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 = \dfrac{81}{4} < 27 = (3\sqrt{3})^2$ より

$$\frac{9}{2} < 3\sqrt{3}$$

であるから n が整数のとき

$$(\sqrt{3})^n \quad (n \leqq 0,\ 3 \leqq n)$$

は ③ を満たさない．

第２問　微分法・積分法

x の関数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3$ があり，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とする．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2+\boxed{\text{イ}}x$$

であるから，$f(x)$ は

$x=\boxed{\text{ウ}}$ のとき　極小値 $\boxed{\text{エオ}}$

$x=\boxed{\text{カ}}$ のとき　極大値 $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

をとる．

⑴　k を正の実数とする．

$0\leqq x\leqq k$ における $f(x)$ の最小値が $\boxed{\text{エオ}}$ 未満となるような k の値の範囲は

$$k>\boxed{\text{コ}}$$

である．

⑵　C_1 上の点 $\mathrm{A}(3,\ 6)$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{サ}}x-\boxed{\text{シ}}$$

である．点 A と異なる点 B を C_1 上にとる．点 B における C_1 の接線 m が ℓ と平行であるとき，B の座標は $\left(\boxed{\text{ス}},\ \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$ であり，m の方程式は

$$y=\boxed{\text{サ}}x-\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である．

次に，x の２次関数 $g(x)$ があり，放物線 $y=g(x)$ を C_2 とする．C_2 は点 A において直線 ℓ と接し，さらに点 B を通る．このとき

$$g(x)=\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}x^2+\boxed{\text{ヌ}}x-\boxed{\text{ネ}}$$

である．

放物線 C_2，直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分を D とすると，D の面積は $\boxed{\text{ノ}}$ であり，D は直線 m によって面積比が $\boxed{\text{ハヒ}}:\boxed{\text{フ}}$ である二つの部分に分けられる．

【解説】

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{-}x^2+\boxed{4}x$$
$$=-x(x-4)$$

☜ **導関数**

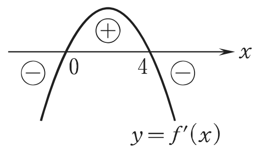
$(x^n)'=nx^{n-1}$　(n は自然数)

$(c)'=0$　(c は定数)．

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\dfrac{23}{3}$	$\searrow$

$f'(x)$ の符号は，$y=f'(x)$ のグラフで確認するとよい．



よって，$f(x)$ は

$$x=\boxed{0}\ \text{のとき，極小値}\ \boxed{-3}$$

$$x=\boxed{4}\ \text{のとき，極大値}\ \frac{\boxed{23}}{\boxed{3}}$$

をとる．

(1)　x の方程式 $f(x)=-3$ を満たす x の値は

$$-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3=-3$$

すなわち

$$x^2(x-6)=0$$

より

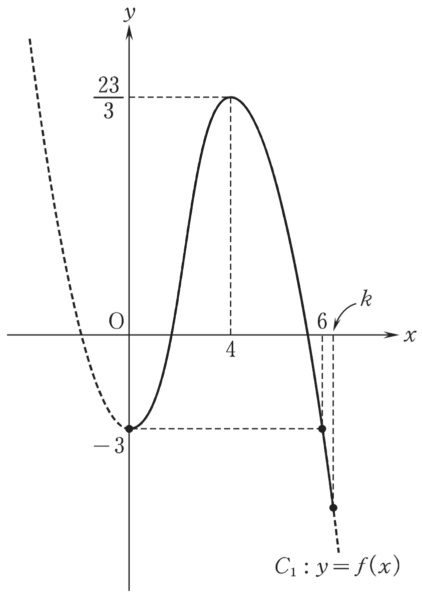
$$x=0,\ 6$$

である．

よって，k を正の実数とするとき，$0\leqq x\leqq k$ における $f(x)$ の最小値が -3 未満となるような k の値の範囲は，下のグラフより

$$k>\boxed{6}$$

である．



(2) $f'(x)=-x^2+4x$ より，$f'(3)=-3^2+4\cdot3=3$ であるから，
C_1 上の点 $\mathrm{A}(3,\ 6)$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y-6=3(x-3)$$

すなわち

$$y=\boxed{3}x-\boxed{3}$$

である．

点 A 以外の C_1 上の点 B における C_1 の接線 m が ℓ と平行であるとき，B の x 座標を t とすると，$f'(t)=3$ より

$$-t^2+4t=3$$
$$(t-1)(t-3)=0.$$

$t\neq3$ であるから

$$t=1$$

となるので，B の座標は $\left(\boxed{1},\ \dfrac{\boxed{-4}}{\boxed{3}}\right)$ である．よって，
接線 m の方程式は

$$y-\left(-\frac{4}{3}\right)=3(x-1)$$

より

$$y=3x-\frac{\boxed{13}}{\boxed{3}}$$

である．

x の 2 次関数 $g(x)$ は $g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ とおけ，放物線 $y=g(x)$ が C_2 である．

まず，C_2 が点 A において ℓ と接する条件は

$$g(3)=6\quad かつ\quad g'(3)=3$$

であり，さらに，C_2 が点 B を通る条件は

$$g(1)=-\frac{4}{3}$$

であるから

$$\begin{cases} 9a+3b+c=6 \\ 6a+b=3 \\ a+b+c=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

を解いて

$$a=-\frac{1}{3},\quad b=5,\quad c=-6$$

が得られる．よって，$g(x)$ は

$$g(x)=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{3}}x^2+\boxed{5}x-\boxed{6}$$

である．

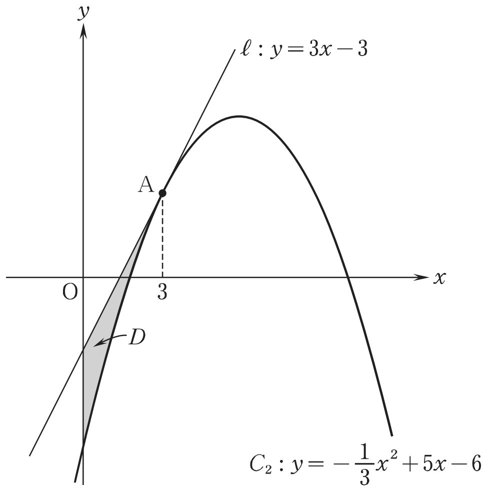
☜ **接線の方程式**
点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は
$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

☜ 点 B の y 座標は
$$f(1)=-\frac{1}{3}+2-3=-\frac{4}{3}.$$

☜ C_2 は点 A を通るので，$g(3)=6$.
C_2 上の点 A における C_2 の接線の傾きは ℓ の傾きと一致するので，$g'(3)=3$.

☜ $g'(x)=2ax+b$ より，$g'(3)=6a+b$.

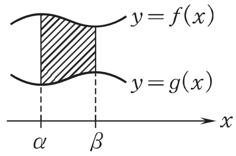
放物線 C_2，直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分が D であるから，D は下図の影の部分である．



面積

区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに $g(x) \leqq f(x)$ ならば，二つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および二つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



D の面積を S とすると

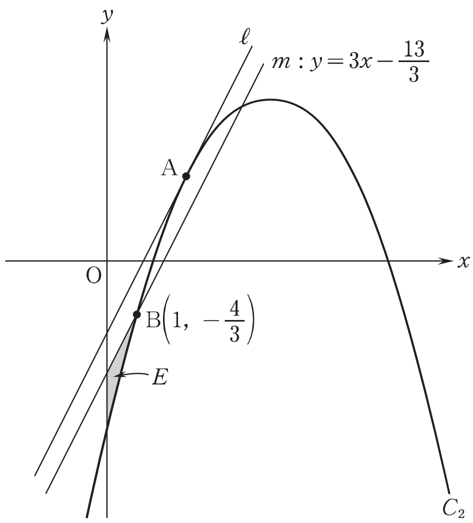
$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{(3x-3)-\left(-\frac{1}{3}x^2+5x-6\right)\right\}dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 (x^2-6x+9)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3 \\ &= \boxed{\;3\;} \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\int_0^3 (x^2-6x+9)\,dx \\ &=\frac{1}{3}\int_0^3 (x-3)^2\,dx \\ &=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_0^3 \\ &=\frac{1}{9}\{0-(-3)^3\} \\ &=3 \end{aligned}$$

と計算してもよい．

さらに，放物線 C_2，直線 m および y 軸で囲まれた部分を E とすると，E は下図の影の部分である．



E の面積を T とすると

$$T=\int_0^1\left\{\left(3x-\frac{13}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}x^2+5x-6\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(x^2-6x+5)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right]_0^1$$

$$=\frac{7}{9}$$

であるから，D は直線 m によって面積比が $\boxed{20}$: $\boxed{7}$ である二つの部分に分けられる．

☜ $(S-T):T=\left(3-\frac{7}{9}\right):\frac{7}{9}$

$=\frac{20}{9}:\frac{7}{9}$

$=20:7.$

第3問 数 列

数列 $\{a_n\}$ は $a_2=6$，$a_3=12$ である等比数列である．数列 $\{a_n\}$ の公比は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$a_1=\boxed{\text{イ}}$ である．$a_n<500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{\text{ウ}}$ である．また，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\boxed{\text{エ}}\left(\boxed{\text{オ}}^{\,n}-\boxed{\text{カ}}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

次に，数列 $\{b_n\}$ は等差数列であり，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とすると

$$b_5=21,\quad T_5=55$$

を満たしている．

$$b_n=\boxed{\text{キ}}\,n-\boxed{\text{ク}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$T_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}n^2-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

数列 $\{a_n\}$ か数列 $\{b_n\}$ の少なくとも一方に現れる数を，小さいものから順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とする．ただし，数列 $\{a_n\}$ にも数列 $\{b_n\}$ にも現れる数は，数列 $\{c_n\}$ には一度だけ現れるものとする．$c_n<500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{\text{スセソ}}$ であり

$$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{スセソ}}}c_k=\boxed{\text{タチツテト}}$$

である．

【解説】

等比数列 $\{a_n\}$ の公比を r とすると

$$r=\frac{a_3}{a_2}=\frac{12}{6}=\boxed{2}$$

☜ $a_2=6$，$a_3=12$.

であり，初項 a_1 は

$$a_1=\frac{a_2}{r}=\frac{6}{2}=\boxed{3}$$

であるから，一般項は

$$a_n=3\cdot2^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ **等比数列の一般項**

公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a_1r^{n-1}.$$

である．よって，$a_n<500$ は

$$3\cdot2^{n-1}<500$$

より

$$2^{n-1}<\frac{500}{3}\left(=166+\frac{2}{3}\right)$$

となり，n は自然数であるから

$$n-1\leqq7$$

☜ $2^7=128$，$2^8=256$.

より

$$n\leqq8$$

となる．よって，$a_n<500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{8}$ である．

また，等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}$$
$$=\boxed{3}\left(\boxed{2}^n-\boxed{1}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

次に，等差数列 $\{b_n\}$ の公差を d とすると，$b_5=21$ より

$$b_1+4d=21. \qquad \cdots ①$$

さらに，$T_5=55$ より

$$\frac{5(b_1+b_5)}{2}=55$$
$$b_1+b_5=22$$

が成り立ち，$b_5=21$ であるから

$$b_1+21=22$$

より

$$b_1=1$$

となる．これを ① に代入して d を求めると

$$d=5$$

である．よって

$$b_n=1+(n-1)\cdot 5$$
$$=\boxed{5}n-\boxed{4}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots ②$$

であり

$$T_n=\frac{n(b_1+b_n)}{2}$$
$$=\frac{n\{1+(5n-4)\}}{2}$$
$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}n^2-\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

等比数列の和

初項 a，公比 $r\ (\neq 1)$，項数 n の等比数列の和は

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

等差数列の一般項

公差 d の等差数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=b_1+(n-1)d.$$

等差数列の和

初項 b，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は

$$\frac{n(b+\ell)}{2}.$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(5k-4)$$
$$=5\cdot\frac{n(n+1)}{2}-4n$$
$$=\frac{5}{2}n^2-\frac{3}{2}n$$

と計算してもよい．

数列 $\{b_n\}$ は 5 で割ったときの余りが 1 となる自然数を小さいものから順に並べたものであり，各項の一の位は 1 または 6 である．

② より，$b_n=5(n-1)+1$.

よって，$a_n<500$ を満たす a_n である a_1 から a_8，すなわち

$$a_1=3,\ a_2=6,\ a_3=12,\ a_4=24,$$
$$a_5=48,\ a_6=96,\ a_7=192,\ a_8=384$$

のうち，数列 $\{b_n\}$ にも現れるものは a_2 と a_6 の 2 個である．

$a_2=b_2=6,\quad a_6=b_{20}=96.$

また，$b_n<500$ は

$$5n-4<500$$

であるから

$$n < \frac{504}{5} \ \left(= 100 + \frac{4}{5} \right)$$

となり，n は自然数であるから

$$n \leqq 100$$

となる．よって，$b_n < 500$ を満たす b_n は b_1 から b_{100} までの 100 個である．したがって，$c_n < 500$ を満たす c_n は

$$a_1,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_7,\ a_8 \quad と \quad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{100}$$

☜ これら 106 個の項を小さいものから順に並べたものが，数列 $\{c_n\}$ の項のうち 500 未満の部分である．

の 106 個であるから，$c_n < 500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{106}$ であり

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{106} c_k &= \{S_8 - (a_2 + a_6)\} + T_{100} \\ &= 3(2^8 - 1) - (6 + 96) + \left(\frac{5}{2} \cdot 100^2 - \frac{3}{2} \cdot 100 \right) \\ &= \boxed{25513} \end{aligned}$$

☜ $S_n = 3(2^n - 1)$.

☜ $T_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

である．

第4問　ベクトル

平行四辺形OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．
線分BCの中点をMとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\vec{c}$$

である．また，三角形ABCの重心をGとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}$$

である．

(1)　点Dを $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{c}$ となるようにとり，直線OMと直線BDの交点をEとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表そう．

点Eが直線OM上にあることから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}s\vec{a}+s\vec{c}$$

となる．さらに，点Eが直線BD上にあることから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\boxed{ケ}-t\right)\vec{a}+\left(\boxed{コ}+t\right)\vec{c}$$

となる．これらから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\vec{c}$$

である．

また，三角形DMEの面積は平行四辺形OABCの面積の $\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ 倍である．

(2)　$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}$，$\cos\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．このとき

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{チ}$$

である．

また，点Gを通り直線ACに垂直な直線と，直線ACとの交点をHとすると

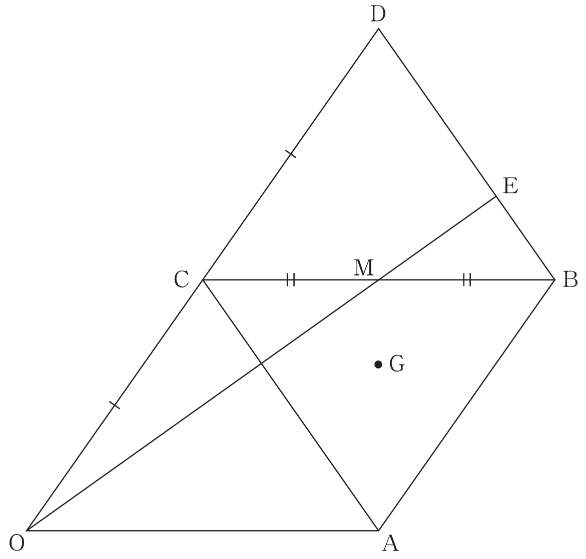
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}\vec{c}$$

であり

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|=\frac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$$

である．

【解説】



四角形 OABC は平行四辺形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{c}$$

である．また，点 M は線分 BC の中点だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\vec{a}+\vec{c}\end{aligned}$$

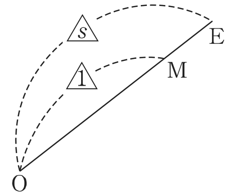
である．さらに，点 G は三角形 ABC の重心だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\frac{1}{3}\{\vec{a}+(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}\}\\&=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{c}\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$.

である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{c}$ であり，点 E は直線 OM と直線 BD の交点である．



まず，点 E が直線 OM 上にあることから，実数 s を用いて

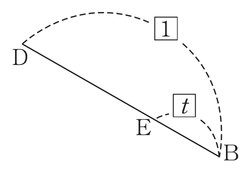
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{1}{2}s\vec{a}+s\vec{c}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

☜

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}$.

と表される．

次に，点 E が直線 BD 上にあることから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表されるから ☜



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=(1-t)(\vec{a}+\vec{c})+t\times(2\vec{c})\\&=\left(\boxed{1}-t\right)\vec{a}+\left(\boxed{1}+t\right)\vec{c}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{c}$.

となる．

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ であるから，①，② より

$$\frac{1}{2}s=1-t \quad かつ \quad s=1+t$$

☜ α, β, α', β' が実数であり，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき

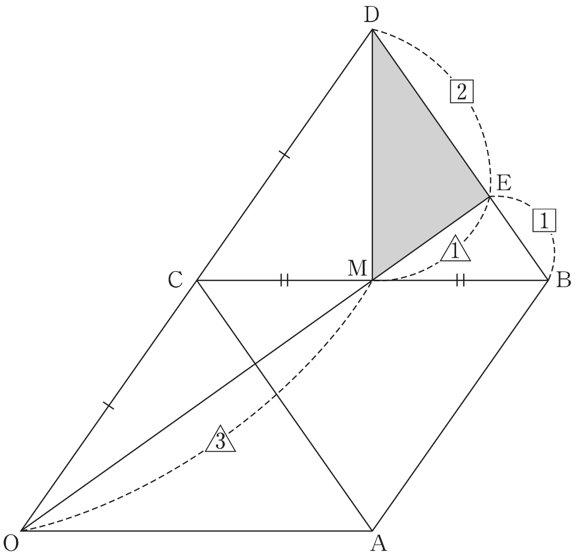
$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$$
$$\iff \alpha=\alpha' \quad かつ \quad \beta=\beta'.$$

が成り立ち，これより，$s=\dfrac{4}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$ である．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\vec{c}$$

となり，s，t の値より，下の図を得る．



☜ $s=\dfrac{4}{3}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

$t=\dfrac{1}{3}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

よって，平行四辺形 OABC の面積を S とおくと

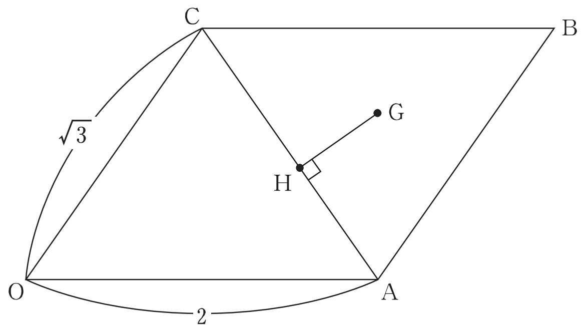
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DME}&=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{DMB}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\triangle\mathrm{DCB}\right)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S\right)\\&=\frac{1}{6}S\end{aligned}$$

であるから，三角形 DME の面積は平行四辺形 OABC の面積の

$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$ 倍である．

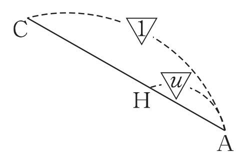
(2) $$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}$$
$$=2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=\boxed{2}$$
である．

☜ **内積の定義**
$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$



点 H は，点 G を通り直線 AC に垂直な直線と，直線 AC との交点である．

まず，点 H が直線 AC 上にあることから，実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されるから

☜ 

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=u(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$
より
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(1-u)\vec{a}+u\vec{c} \qquad \cdots ③$$
となる．よって
$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$
$$=(1-u)\vec{a}+u\vec{c}-\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$.

$$=\left(\frac{1}{3}-u\right)\vec{a}+\left(u-\frac{2}{3}\right)\vec{c} \qquad \cdots ④$$
である．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=0$ であるから

☜ **垂直条件**
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}-u\right)\vec{a}+\left(u-\frac{2}{3}\right)\vec{c}\right\}=0$$
より
$$\left(u-\frac{1}{3}\right)|\vec{a}|^2+\left(u-\frac{2}{3}\right)|\vec{c}|^2+(-2u+1)\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

☜ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

が成り立つ．

さらに，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=2$ であるから
$$4\left(u-\frac{1}{3}\right)+3\left(u-\frac{2}{3}\right)+2(-2u+1)=0$$
より
$$u=\frac{4}{9}$$
である．これを ③ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}\vec{a}+\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}\vec{c}$$

である．また，④ より

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=-\frac{1}{9}\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{c}$$
$$=-\frac{1}{9}(\vec{a}+2\vec{c})$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|^2=\frac{1}{9^2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{c}+4\left|\vec{c}\right|^2\right)$$
$$=\frac{1}{9^2}(4+8+12)$$
$$=\frac{24}{9^2}$$

☜ $\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=2$ を代入した．

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{9}}$$

である．