時習館高等部 センター講座

センター模擬試験

第４回　数学　ＩＡ

解説と解答

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	$\frac{\sqrt{\text{アイ}}+\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$	$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\frac{\sqrt{\text{オカ}}-\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$	$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$	2	
	$\frac{\sqrt{\text{ケ}}-\text{コ}}{\text{サ}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	2	
	シ	1	3	
	$\sqrt{\text{スセ}}$	$\sqrt{10}$	3	
	$\frac{\sqrt{\text{ソタ}}}{\text{チ}}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	3	
	$\frac{\text{ツ}\sqrt{\text{テト}}}{\text{ナ}}$	$\frac{3\sqrt{15}}{4}$	3	
	$\frac{\text{ニ}\sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	3	
	$\frac{\text{ノ}\sqrt{\text{ハヒ}}}{\text{フ}}$	$\frac{2\sqrt{15}}{3}$	4	
	$\frac{\text{ヘ}}{\text{ホ}}$	$\frac{5}{8}$	4	
		第1問　自己採点小計	(30)	
第2問	アa	$2a$	2	
	イa^2−ウa−エ	$2a^2-2a-4$	2	
	オカ$<a<$キ	$-1<a<2$	4	
	ク	6	4	
	$\frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$	$\frac{-1}{4}$	4	
	$\frac{\text{シス}}{\text{セ}}$	$\frac{-2}{3}$	4	
	ソ	0	2	
	タ	5	2	
	チ	3	3	
	ツ	4	3	
		第2問　自己採点小計	(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{3}$	2	
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{1}{9}$	2	
	$\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\frac{4}{9}$	2	
	$\frac{\text{キ}}{\text{クケ}}$	$\frac{4}{81}$	3	
	$\frac{\text{コサ}}{\text{シス}}$	$\frac{25}{81}$	3	
	セ	0	3	
	$\frac{\text{ソタ}}{\text{チツテ}}$	$\frac{41}{729}$	5	
		第3問　自己採点小計	(20)	
第4問	ア	5	3	
	イ	6	3	
	ウ	1	3	
	$(p-$エ$)(q-$オ$)=$カキクケ	$(p-8)(q-2)=1350$	3	
	コサ	35	2	
	シス	52	2	
	セソタ	107	2	
	チツテ	−72	2	
		第4問　自己採点小計	(20)	

第１問　数と式，図形と計量

〔１〕 2 次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

実数 x に関する条件 p，q を次のように定める．

$$p:\frac{1}{\alpha}<x<\alpha$$

$$q:\left|2x-\sqrt{5}\right|<1$$

条件 q を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}<x<\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}+\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であり，このとき

p は q であるための $\boxed{\text{シ}}$．

$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

〔２〕 △ABC において BC＝2，CA＝3，$\cos\angle\mathrm{BCA}=\frac{1}{4}$ とする．このとき

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\boxed{\text{スセ}}},\quad \sin\angle\mathrm{BCA}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である．

また，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であり，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$

である．

次に，点 D を △ABC の外接円の点 B を含まない弧 CA 上に，線分 BD が △ABC の外接円の直径となるようにとる．このとき

$$\mathrm{CD}=\frac{\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}$$

である．

さらに，空間内で，四角形 ABCD を直線 CA を折り目として，△ACD を △ABC と垂直になるように折る．折った後の点 D を点 E と呼ぶことにすると，四面体 EABC の体積は

$$\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

である．

【解説】

〔1〕

2 次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解は，

$$x=\frac{-(-\sqrt{10})\pm\sqrt{(-\sqrt{10})^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2}$$

☜ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c は実数）の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

であるから，

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{10}}+\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

であり，

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{10}}-\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}$$

☜ 分母を有理化するために，分母，分子に $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ を掛けた．

である．

$$p:\frac{1}{\alpha}<x<\alpha,$$

$$q:\left|2x-\sqrt{5}\right|<1.$$

条件 q を満たす x の値の範囲は，

$$-1<2x-\sqrt{5}<1$$

$$\sqrt{5}-1<2x<\sqrt{5}+1$$

$$\frac{\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{1}}{\boxed{2}}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \cdots①$$

☜ $a>0$ のとき，X の不等式 $|X|<a$ の解は，

$$-a<X<a.$$

である．

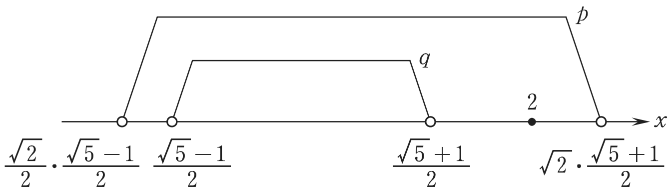
また，条件 p の不等式 $\frac{1}{\alpha}<x<\alpha$ は，

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}<x<\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \cdots ②$$

となる．

①，② より，次図を得る．



よって，「$p \Longrightarrow q$」は偽(反例：$x=2$)であり，「$q \Longrightarrow p$」は真であるから，p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない，すなわち $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

$\sqrt{2}<2$ つまり $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ と

$\sqrt{5}-1>0$ より，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$1<\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}+1>0$ より，

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}<\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

2つの条件 s，t について，

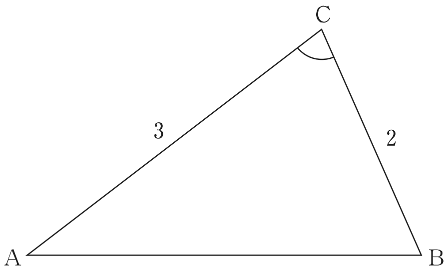
「$s \Longrightarrow t$」が真

のとき，

s は t であるための十分条件，

t は s であるための必要条件．

［2］



余弦定理より，

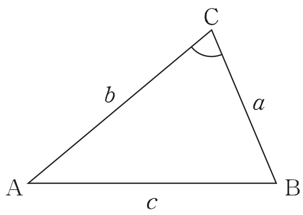
$$\begin{aligned}AB^2&=BC^2+CA^2-2BC\cdot CA\cos\angle BCA\\&=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{4}\\&=10\end{aligned}$$

であるから，

$$AB=\sqrt{\boxed{10}}$$

である．

余弦定理



$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

$$\begin{aligned}\sin\angle BCA&=\sqrt{1-\cos^2\angle BCA}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$

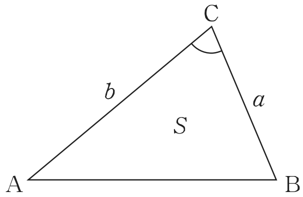
$0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

であり，

$$\begin{aligned}(\triangle ABC\text{ の面積})&=\frac{1}{2}BC\cdot CA\sin\angle BCA\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

三角形の面積



$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$$

である．

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{BCA}}$$

であるから，

$$R=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{BCA}}$$

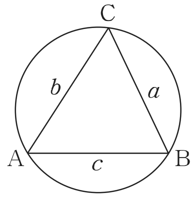
$$=\frac{\sqrt{10}}{2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{15}}$$

$$=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$$

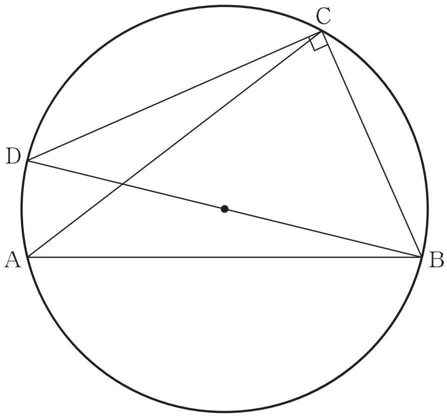
である．

☜ **正弦定理**

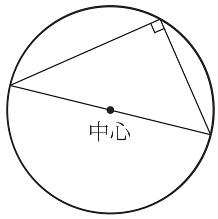


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

（R は △ABC の外接円の半径）



線分 BD は △ABC の外接円の直径であるから，$\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ であり，△BCD は直角三角形である．

☜ 

半円の弧に対する円周角は 90° である．

△BCD に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{CD}=\sqrt{\mathrm{BD}^2-\mathrm{BC}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2-2^2}$$

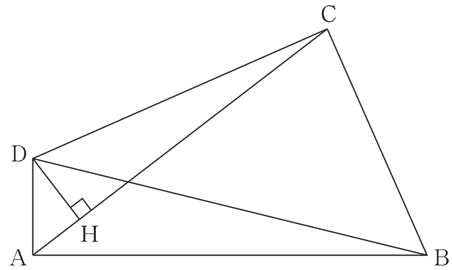
$$=\sqrt{\frac{20}{3}}$$

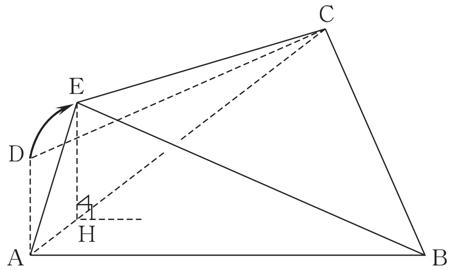
$$=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{3}}$$

である．

☜ $\mathrm{BD}=2R=2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}.$

Dから直線ACに下ろした垂線の足をHとする．





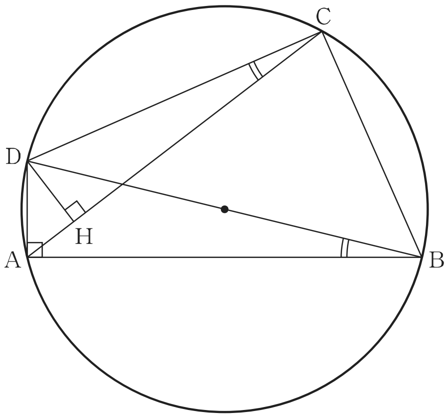
DH＝EH であるから，四面体EABCの体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})\cdot\mathrm{EH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})\cdot\mathrm{DH} \qquad \cdots(*)$$

である．

ここで，線分DHの長さを求める．



∠BAD＝90° であるから，直角三角形ABDに三平方の定理を用いると，

☜ 線分BDは△ABCの外接円の直径である．

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{BD}^2-\mathrm{AB}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2-(\sqrt{10})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

である．

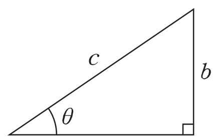
よって，直角三角形ABDに着目すると，

$$\sin\angle\mathrm{ABD}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

☜



$\sin\theta=\frac{b}{c}$.

であるから，

$$\sin\angle \mathrm{ACD}=\sin\angle \mathrm{ABD}$$
$$=\frac{1}{4}$$

である．

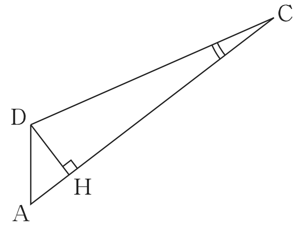
☜　弧 AD に対する円周角は等しい．

したがって，直角三角形 CDH に着目すると，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{HCD}$$
$$=\mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{ACD}$$
$$=\frac{2\sqrt{15}}{3}\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

である．

☜



$\sin\angle \mathrm{HCD}=\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{CD}}$ より，

$\mathrm{DH}=\mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{HCD}$.

よって，(*) より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{6}$$
$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}$$

である．

（注）　線分 DH の長さを求める部分的別解

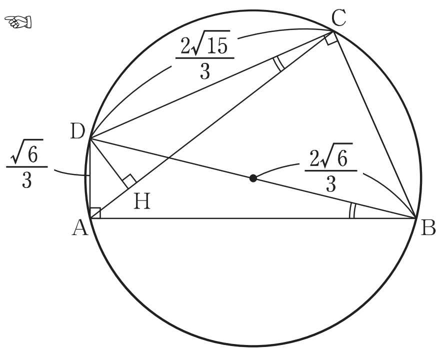
線分 AD の長さを求めるところまでは同じ．

△CDH∽△BDA より，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DA}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\frac{2\sqrt{15}}{3}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

である．

☜



第2問　2次関数，データの分析

〔1〕 a を実数とし，x の2次関数

$$y = x^2 - 4ax + 6a^2 - 2a - 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

関数①のグラフを G とする．

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

(1) G が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{オカ}} < a < \boxed{\text{キ}}$$

であり，$a = \boxed{\text{オカ}}$ のときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{\text{キ}}$ のときの G に一致する．

(2) $-1 \leqq x \leqq 0$ における関数①の最大値を M とする．

G と y 軸との交点の y 座標を Y とすると，$M = Y$ となるような a の値の範囲は

$$a \leqq \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であり，このとき，$M > 0$ となるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

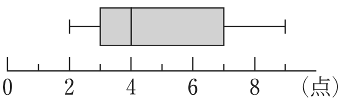
〔2〕 15人の生徒に対して行った10点満点のテストAの得点のデータについて，第1四分位数，中央値，第3四分位数を調べたところ次の表のようになった．ただし，得点はすべて整数値である．

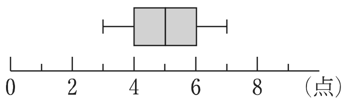
なお，四分位数とは，データを値の大きさの順に並べたとき，4等分する位置にくる値であり，小さい方から順に，第1四分位数，第2四分位数，第3四分位数という．第2四分位数は中央値である．データの大きさが奇数のときは，データを値の小さい方から順に左から並べたとき，中央の位置にくる値よりも左側のデータを下位のデータ，右側のデータを上位のデータと呼ぶこととすると，下位のデータの中央値が第1四分位数，上位のデータの中央値が第3四分位数である．

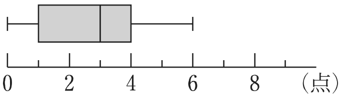
	テストA
第1四分位数	3
中　央　値	4
第3四分位数	7

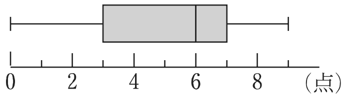
次の⓪～⑦の箱ひげ図とヒストグラムには，テストAの得点のものが含まれている．

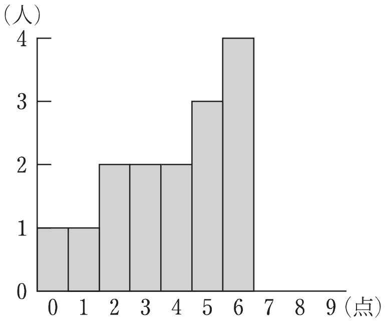
(1)の $\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ．

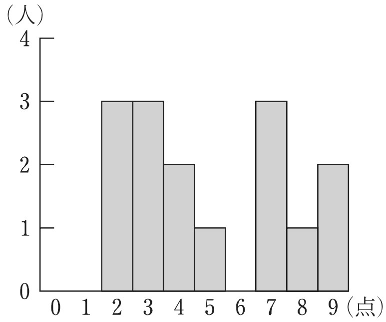
⓪


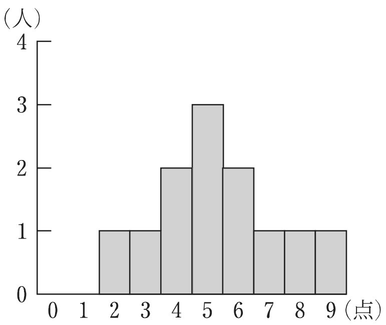
①


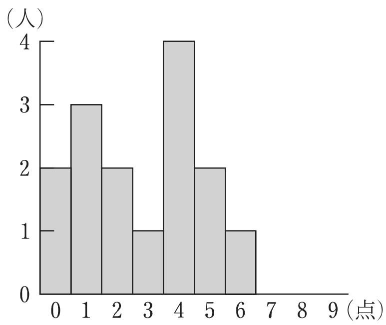
②


③


④


⑤


⑥


⑦


(1) テスト A の得点の箱ひげ図は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，ヒストグラムは $\boxed{\text{タ}}$ である．

(2) テスト A を 20 点満点にするため，テスト A の得点を 2 倍にした．このとき，変更前のものと比較して

テスト A の得点の平均値は $\boxed{\text{チ}}$．

テスト A の得点の分散は $\boxed{\text{ツ}}$．

$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～④のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ $\frac{1}{4}$ 倍になる

① $\frac{1}{2}$ 倍になる

② 変化しない

③ 2 倍になる

④ 4 倍になる

【解説】

〔1〕

$$f(x)=x^2-4ax+6a^2-2a-4$$

とする．

$$f(x)=(x-2a)^2+2a^2-2a-4$$

であるから，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}a,\ \boxed{2}a^2-\boxed{2}a-\boxed{4}\right) \quad \cdots ②$$

である．

> 放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，
> $$(q,\ r).$$

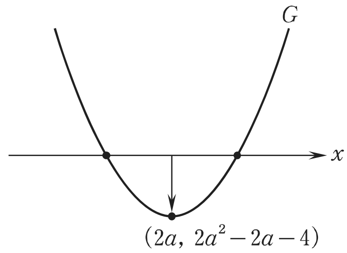
⑴　G が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は，

$$2a^2-2a-4<0 \quad \text{すなわち} \quad 2(a+1)(a-2)<0$$

より，

$$\boxed{-1}<a<\boxed{2}$$

である．



また，$a=-1$ のときの G を G_1 とすると，G_1 の頂点の座標は，② より，

$$(-2,\ 0)$$

であり，$a=2$ のときの G を G_2 とすると，G_2 の頂点の座標は，② より，

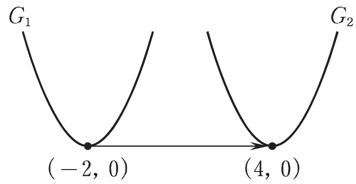
$$(4,\ 0)$$

である．

よって，G_1 を x 軸方向に，

$$4-(-2)=\boxed{6}$$

だけ平行移動すれば，G_2 と一致する．



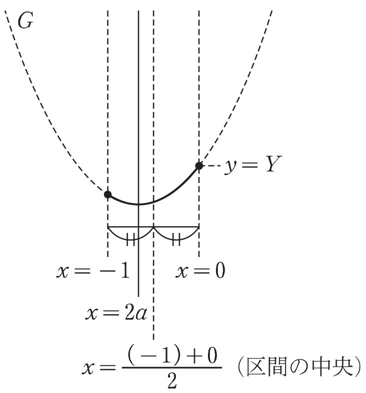
⑵　$M=Y$ となるような a の値の範囲は，

$$2a \leqq \frac{(-1)+0}{2}$$

より，

$$a \leqq \frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}} \quad \cdots ③$$

である．



このとき，$M>0$ となるような a の値の範囲は，

$$M=Y=f(0)=6a^2-2a-4>0$$

$$2(3a+2)(a-1)>0$$

$$a<-\frac{2}{3},\quad 1<a$$

および ③ より，

$$a<\frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}}$$

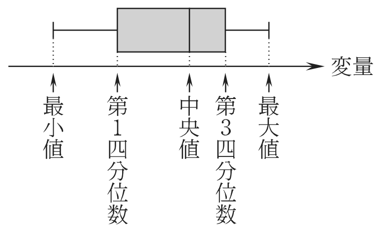
である．

〔2〕

(1) ⓪～③の第1四分位数，中央値，第3四分位数は次表のようになる．

	⓪	①	②	③
第1四分位数	3	4	1	3
中　央　値	4	5	3	6
第3四分位数	7	6	4	7

☜ 下図のように，最小値，第1四分位数，中央値，第3四分位数，最大値を箱と線(ひげ)を用いて1つの図に表したものを箱ひげ図という．



これより，テスト A の得点の箱ひげ図は⓪であり，ソ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

また，④，⑤，⑦は15人分のデータであり，⑥は12人分のデータである．

④，⑤，⑦について，データを値の大きさの順に並べると次のようになる．

④　0，1，2，2，3，3，4，4，5，5，5，6，6，6，6

⑤　2，2，2，3，3，3，4，4，5，7，7，7，8，9，9　　…(*)

⑦　0，0，1，1，1，2，2，3，4，4，4，4，5，5，6

	④	⑤	⑦
第1四分位数	2	3	1
中　央　値	4	4	3
第3四分位数	6	7	4

したがって，テスト A の得点のヒストグラムは⑤であり，

タ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$ である．

☜ 最大値，最小値も箱ひげ図と一致し，適している．

(2) (*)より，得点を2倍にした後のテスト A のデータは次のようになる．

4，4，4，6，6，6，8，8，10，14，14，14，16，18，18

このとき，テスト A の得点の平均値は，

$$\frac{4+4+4+6+6+6+8+8+10+14+14+14+16+18+18}{15}$$

$$=2\times\frac{2+2+2+3+3+3+4+4+5+7+7+7+8+9+9}{15}$$

$=2\times$(元のテスト A の得点の平均値)

である．

☜ **平均値**

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

よって，テスト A の得点の平均値は2倍になる，すなわち，

チ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☜ 新たに平均値を求めなくても，すべてのデータの値が2倍になることから変更前のものと比べて平均値は2倍になることがわかる．

また，このときのテスト A の得点の分散は，

$$\frac{1}{15}\{(4-10)^2+(4-10)^2+(4-10)^2+(6-10)^2+(6-10)^2+(6-10)^2+(8-10)^2+(8-10)^2$$
$$+(10-10)^2+(14-10)^2+(14-10)^2+(14-10)^2+(16-10)^2+(18-10)^2+(18-10)^2\}$$
$$=2^2\times\frac{1}{15}\{(2-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2$$
$$+(5-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2\}$$

＝4×(元のテスト A の得点の分散)

である．

よって，テスト A の得点の分散は 4 倍になる，すなわち

$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

偏差・分散

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなり，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，(これらの)偏差の 2 乗の平均値が x の分散 s^2 となる．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

データの値，平均値ともに 2 倍になることから偏差も 2 倍になり，偏差の 2 乗は 4 倍になる．これより，新たに分散を求めなくても，変更前のものと比べて分散は 4 倍になることがわかる．

第 3 問　場合の数と確率

A，B の二人がそれぞれ袋を持っている．

はじめ，A の袋には赤球が 1 個，白球が 2 個の合計 3 個の球が入っており，B の袋には赤球が 2 個，白球が 1 個の合計 3 個の球が入っている．

次の規則に従ってゲームをする．

（規則）

A，B の二人がそれぞれ自分の袋から 1 個の球を取り出し，取り出した球 2 個の色について

- 同じ色であれば，引き分けとし，取り出した球をそれぞれ自分の袋に戻す．
- 異なる色であれば，赤球を取り出した方を勝ちとし，取り出した球をそれぞれ相手の袋に入れる．

⑴　ゲームを 1 回行うとき，A が赤球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，A が勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，B が勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

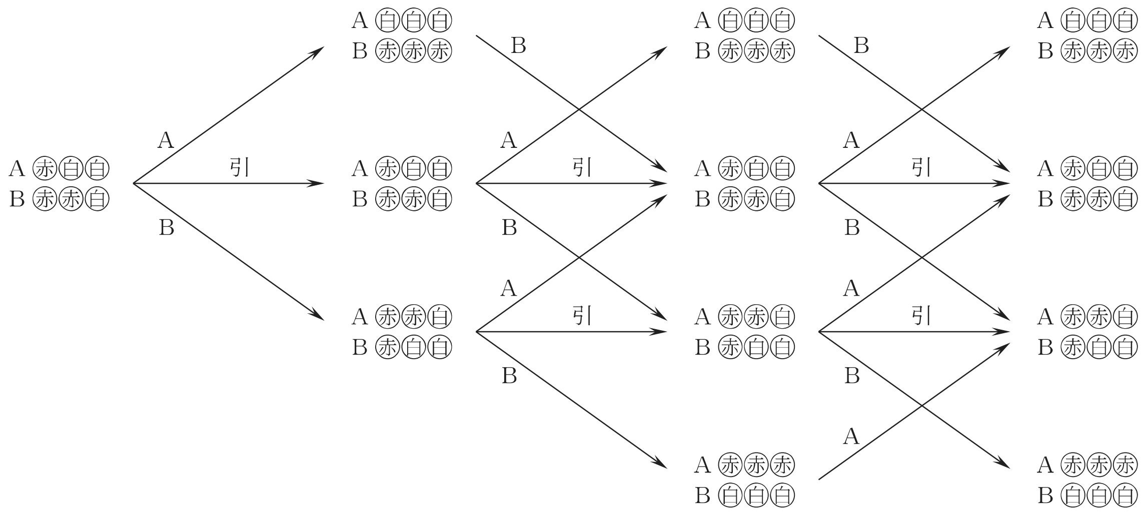
⑵　ゲームを 2 回続けて行うとき，A の勝ちと引き分けが 1 回ずつとなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ であり，A の勝ちと B の勝ちが 1 回ずつとなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．また，A の勝ちが 2 回となる確率は $\boxed{\text{セ}}$ である．

⑶　ゲームを 3 回続けて行うとき，A の勝ちの回数が B の勝ちの回数よりも多くなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である．

【解説】

A の勝ち，引き分け，B の勝ちを順に，「A」，「引」，「B」と表して，3 回までのゲームの推移を表すと次図のようになる．

その際，二人のうち，一方の袋に赤球が 3 個が入っているときは，必ずこの袋を持っている方が勝つことに注意する．



⑴ ゲームを1回行うとき，A が赤球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ ☜ 「赤白白」から赤を取り出す.

である.

ゲームを1回行うとき，A が勝つのは，A が赤球を取り出し，B が白球を取り出す場合であるから，その確率は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}} \quad \cdots ①$$

☜ B が白を取り出すのは「赤赤白」から白を取り出す場合であり，その確率は $\frac{1}{3}$ である.

である.

ゲームを1回行うとき，B が勝つのは，A が白球を取り出し，B が赤球を取り出す場合であるから，その確率は，

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}} \quad \cdots ②$$

である.

また，ゲームを1回行うとき，引き分けとなる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{9} \quad \cdots ③$$

☜ 二人が取り出す球の色が，「ともに赤」または「ともに白」であるから，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

としてもよい.

である.

⑵ A の袋に赤球が2個，白球が1個入っており，B の袋に赤球が1個，白球が2個入っているとき，

A が勝つ確率 $\cdots\dfrac{4}{9}$， ☜ ②と同様.

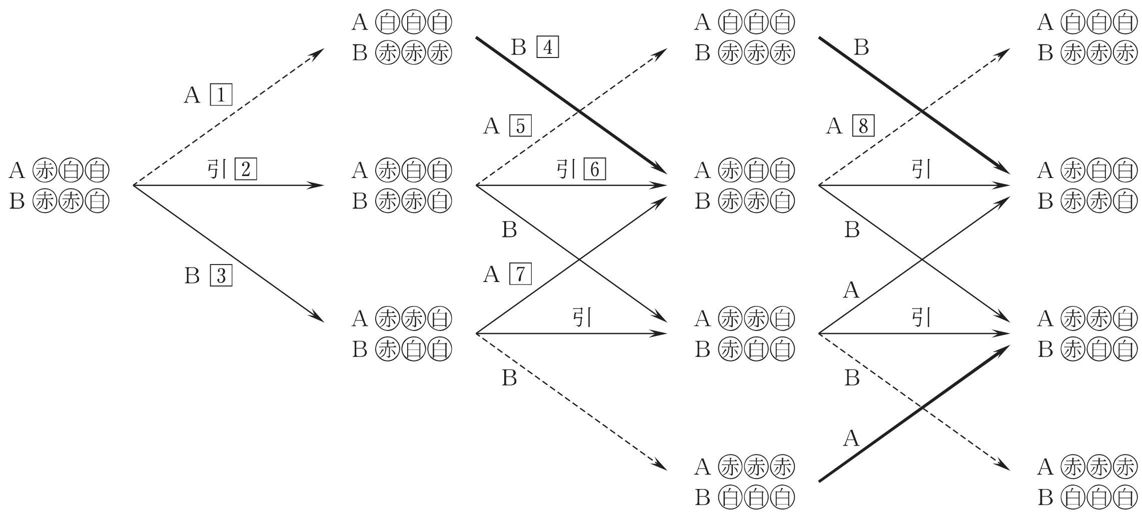
引き分ける確率 $\cdots\dfrac{4}{9}$， ☜ ③と同様.

B が勝つ確率 $\cdots\dfrac{1}{9}$ ☜ ①と同様.

である.

$\left\{\begin{array}{l} \longrightarrow \cdots \text{確率が } \dfrac{4}{9} \text{ であるとき，} \\ \dashrightarrow \cdots \text{確率が } \dfrac{1}{9} \text{ であるとき，} \\ \boldsymbol{\longrightarrow} \cdots \text{確率が } 1 \text{ であるとき} \end{array}\right.$

と表すと，3 回までのゲームの推移は次図のようになる．



ゲームを 2 回続けて行うとき，A の勝ちと引き分けが 1 回ずつとなるのは，1 回目は引き分けで，2 回目に A が勝つ場合であるから，その確率は，

☜ 1 回目に A が勝ったとき，2 回目は必ず B が勝ち（図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$），2 回目に引き分けになることはない．

☜ 図の矢印 $\boxed{2}$，$\boxed{5}$．

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{81}}$$

である．

ゲームを 2 回続けて行うとき，A の勝ちと B の勝ちが 1 回ずつとなるのは，

	1 回目	2 回目
(i)	A の勝ち	B の勝ち
(ii)	B の勝ち	A の勝ち

☜ 図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$．

☜ 図の矢印 $\boxed{3}$，$\boxed{7}$．

の 2 つの場合があり，その確率は，

$$\underbrace{\frac{1}{9}\cdot 1}_{\text{(i)の場合}}+\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}}_{\text{(ii)の場合}}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{81}}$$

である．

ゲームを 2 回続けて行うとき，A の勝ちが 2 回となることはないから，その確率は $\boxed{0}$ である．

☜ 1 回目に A が勝ったとき，2 回目は必ず B が勝ち（図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$），2 回目に A が勝つことはない．

(3) ゲームを 3 回続けて行うとき，A の勝ちの回数が B の勝ちの回数よりも多くなるのは，

	1 回目	2 回目	3 回目
(Ⅰ)	A の勝ち	B の勝ち	A の勝ち
(Ⅱ)	引き分け	引き分け	A の勝ち
(Ⅲ)	B の勝ち	A の勝ち	A の勝ち

☜ 図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{8}$.

☜ 図の矢印 $\boxed{2}$，$\boxed{6}$，$\boxed{8}$.

☜ 図の矢印 $\boxed{3}$，$\boxed{7}$，$\boxed{8}$.

の 3 つの場合があり，その確率は，

$$\underbrace{\frac{1}{9}\cdot 1\cdot\frac{1}{9}}_{\text{(Ⅰ)の場合}}+\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}}_{\text{(Ⅱ)の場合}}+\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}}_{\text{(Ⅲ)の場合}}=\frac{\boxed{41}}{\boxed{729}}$$

である.

第4問　整数の性質

(1)　十の位の数が a である4桁(けた)の整数 $13a0$ が9の倍数であるとき $a=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．このとき，$\sqrt{\dfrac{13a0}{n}}$ が整数となる最小の整数 n は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　$A<B$ である二つの自然数 A，B について，最大公約数，最小公倍数がそれぞれ d，ℓ であり，p，q を2桁の自然数として

$$A=pd,\quad B=qd$$

と表されるとする．このとき

$$\ell=\boxed{\text{ウ}}$$

である．

$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②から一つ選べ．

⓪　pq　　①　pqd　　②　pqd^2

さらに

$$\ell=2A+8B+1334d \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つとする．このとき，① を p，q を用いて表すと

$$\left(p-\boxed{\text{エ}}\right)\left(q-\boxed{\text{オ}}\right)=\boxed{\text{カキクケ}}$$

である．

またさらに，$p-\boxed{\text{エ}}$ が27の倍数であるとすると

$$p=\boxed{\text{コサ}},\quad q=\boxed{\text{シス}}$$

である．

次に

$$\boxed{\text{コサ}}x+\boxed{\text{シス}}y=1$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ のうち，x の値が100に最も近い組は

$$(x,\ y)=\left(\boxed{\text{セソタ}},\ \boxed{\text{チツテ}}\right)$$

である．

【解説】

(1)　整数 $13a0$ が9の倍数となるのは，各位の和すなわち

$$(1+3+a+0=)4+a$$

が9の倍数となるときである．a は0以上9以下の整数であるから，

$$a=\boxed{5}$$

である．

このとき，

$$\begin{aligned}13a0&=1350\\&=2\cdot3^3\cdot5^2\end{aligned}$$

☜　千の位，百の位，十の位，一の位の数がそれぞれ α，β，γ，δ である4桁の整数 N について，

$$\begin{aligned}N&=1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta\\&=9(111\alpha+11\beta+\gamma)+\alpha+\beta+\gamma+\delta\end{aligned}$$

であるから，N が9の倍数であることと $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ が9の倍数であることは同じである．

より，

$$\sqrt{\frac{13a0}{n}}=\sqrt{\frac{2\cdot3^3\cdot5^2}{n}}$$
$$=15\sqrt{\frac{6}{n}}$$

であるから，これが整数となる最小の整数 n は，

$$n=\boxed{6}$$

である．

(2) $A=pd$，　$B=qd$ $(A<B)$．

A，B の最大公約数が d であるから，p と q は互いに素である．

このとき，A，B の最小公倍数 ℓ は，

$$\ell=pqd$$

であるから，$\boxed{ウ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

さらに，

$$\ell=2A+8B+1334d \qquad \cdots ①$$

が成り立つとき，$A=pd$，$B=qd$，$\ell=pqd$ を ① に代入すると，

$$pqd=2pd+8qd+1334d$$

であり，$d\fallingdotseq 0$ であるから，

☜　d は公約数より，$d\fallingdotseq 0$．

$$pq=2p+8q+1334$$

すなわち

$$pq-2p-8q=1334$$
$$(p-8)(q-2)-16=1334$$

となり，p，q は，

$$\left(p-\boxed{8}\right)\left(q-\boxed{2}\right)=\boxed{1350} \qquad \cdots ②$$

を満たす．

$$1350=2\cdot3^3\cdot5^2$$

であることと，$p-8$ が 1350 の約数であることから，p が 2 桁の自然数であり，$p-8$ が 27 の倍数であるとき，

$$p-8=27,\ 54$$

である．

☜　$p-8$ が正で 27 の倍数のとき，$p-8$ は，

3^3，　$3^3\cdot5$，　$3^3\cdot5^2$，

$3^3\cdot2$，$3^3\cdot2\cdot5$，$3^3\cdot2\cdot5^2$

の 6 個が考えられる．

$p-8=54$ のとき，② より $q-2=25$ すなわち

$$p=62,\quad q=27$$

となり，$A<B$ すなわち $p<q$ に適さない．

$p-8=27$ のとき，② より $q-2=50$ すなわち

$$p=\boxed{35},\quad q=\boxed{52}$$

となり，$A<B$ すなわち $p<q$ であり，p，q は互いに素な 2 桁の自然数であるから適する．

☜　$p=5\cdot7$，$q=2^2\cdot13$．

次に，方程式

$$35x+52y=1 \qquad \cdots ③$$

を考える．

$x=3$，$y=-2$ は ③ の整数解の 1 つであり，

$$35\cdot3+52\cdot(-2)=1 \quad \cdots ④$$

である．

③−④ から，

$$35(x-3)+52(y+2)=0$$

すなわち

$$35(x-3)=-52(y+2) \quad \cdots ⑤$$

である．

35 と 52 は互いに素であるから，$x-3$ は 52 の倍数である．

よって，k を整数として，

$$x-3=52k$$

と表される．

これを ⑤ に代入して，整理すると，

$$y+2=-35k$$

となるから，③ の整数解は，

$$x=52k+3,\quad y=-35k-2 \quad (k\text{ は整数})$$

である．

x の値が 100 に最も近いのは $k=2$ のときで，

$$(x,\ y)=(\boxed{107},\ \boxed{-72})$$

である．

☜ 整数解の 1 つが簡単に見つからない場合，互除法が利用できる．

$$52=35\cdot1+17,$$
$$35=17\cdot2+1$$

より，

$$\begin{aligned}1&=35-17\cdot2\\&=35-(52-35\cdot1)\cdot2\\&=35\cdot3+52\cdot(-2)\end{aligned}$$

であるから，③ の整数解の 1 つは，

☜ $(x,\ y)=(3,\ -2)$．

a，b が互いに素である自然数であり，整数 X，Y について，

$$aX=bY$$

が成り立つとき，

X は b の倍数，

Y は a の倍数

である．

☜ $k=1$ のとき，

$(x,\ y)=(55,\ -37)$．