セ ン タ ー 模 擬 試 験

第３回　数学　ⅡＢ

解説と解答

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア	7	2	
	イ	2	2	
	ウ	2	2	
	t^2+エ$t-$オ	t^2+2t-1	2	
	カ	0	2	
	キ	7	2	
	$\frac{ク\pm\sqrt{ケ}}{コ}$	$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$	3	
	サ	1	2	
	$\frac{\pi}{シ}$	$\frac{\pi}{2}$	2	
	$\frac{ス}{セ}$，$\frac{\sqrt{ソ}}{タ}$	$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3	
	$\sqrt{チ}$	$\sqrt{3}$	2	
	$\frac{\pi}{ツ}$	$\frac{\pi}{6}$	2	
	$\frac{\sqrt{テ}}{ト}$，$\sqrt{ナ}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}$	2	
	$\frac{\pi}{ニ}$，$\frac{ヌ}{ネ}\pi$	$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	ア，イ	6，6	3	
	ウ	2	3	
	エ，オ，カ	ー，3，2	3	
	キ	1	1	
	ク	2	1	
	ケ	6	2	
	コ	1	1	
	サ	1	2	
	シ	2	3	
	スセ	ー6	2	
	ソ	6	2	
	タ，チ，ツ	2，1，3	3	
	$\frac{テ}{ト}$	$\frac{1}{2}$	4	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	アイ	40	2	
	ウエ	ー3	2	
	オカ，キ	43，3	2	
	ク，ケコ，サ	2，83，3	3	
	シス	14	2	
	セソタ	287	2	
	チツ	14	1	
	テ	2	2	
	トナニ，ヌ	574，2	2	
	ネノ	26	2	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第4問	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$, $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$	2	
	$\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$, $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$	$\frac{-3}{4}$, $\frac{1}{4}$	2	
	シ	2	2	
	ス	0	2	
	$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\frac{3}{4}$	2	
	$\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$, ツ, $\frac{\text{テ}}{\text{ト}}$, ナ	$\frac{3}{4}$, 1, $\frac{1}{4}$, 1	2	
	$\frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$, $\frac{\text{ネ}}{\text{ノハ}}$	$\frac{2}{5}$, $\frac{9}{10}$	2	
	$\sqrt{\text{ヒ}}$	$\sqrt{2}$	2	
	$\frac{\sqrt{\text{フ}}}{\text{ヘホ}}$	$\frac{\sqrt{2}}{40}$	2	
	第4問	自己採点小計	(20)	
第5問	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{3}$	2	
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{1}{3}$	2	
	$\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\frac{1}{7}$	2	
	$\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\frac{9}{2}$	2	
	$\frac{\text{ケコ}}{\text{サシ}}$	$\frac{35}{12}$	2	
	ス	6	2	
	セ	2	2	
	ソ	0	2	
	タチ	15	2	
	$\frac{\text{ツテ}}{\text{ト}}$	$\frac{47}{3}$	2	
	第5問	自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

〔１〕 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=9^x+9^{-x}+2\cdot 3^x+2\cdot 3^{-x}+1$$

とする．

(1) $f(0)=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $t=3^x+3^{-x}$ とおくと，相加平均と相乗平均の関係により $t\geqq$ $\boxed{\text{イ}}$ であり，t は $\boxed{\text{イ}}$ 以上のすべての実数値をとり得る．

また，$9^x+9^{-x}=t^2-$ $\boxed{\text{ウ}}$ と表されるから，$f(x)$ を t を用いて表すと

$$f(x)=t^2+\boxed{\text{エ}}\,t-\boxed{\text{オ}}$$

となる．

$f(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{カ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる．

(3) 方程式 $f(x)=14$ の解は

$$x=\log_3\left(\frac{\boxed{\text{ク}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

である．

〔２〕 $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で定義された関数 $g(\theta)$ を

$$g(\theta)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

とする．

(1) $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$ $\boxed{\text{サ}}$ である．

(2) 方程式 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}$ の解は

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(3) $g(\theta)=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}\cos\theta$

であり，$h(\theta)=\sin\theta+g(\theta)$ とおくと

$$h(\theta)=\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

である．

k を実数とする．θ の方程式 $h(\theta)=k$ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ において異なる二つの実数解をもつ条件は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}\leqq k<\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．その二つの解のうち大きい方を α とすれば，α のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{ニ}}} < \alpha \leqq \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi \text{ である．}$$

【解説】

〔1〕

(1)　$f(0)=9^0+9^0+2\cdot 3^0+2\cdot 3^0+1=\boxed{7}$.

☞　$9^0=1$，$3^0=1$.

(2)　$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$\frac{3^x+3^{-x}}{2} \geqq \sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}$$

☞ **相加平均と相乗平均の関係**

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}.$$

等号成立は $a=b$ のときである．

☞　$3^x\cdot 3^{-x}=3^{x-x}=3^0=1$.

すなわち

$$3^x+3^{-x} \geqq 2$$

が成り立つ．また，等号成立は $3^x=3^{-x}$ すなわち $x=0$ のときである．よって，$t=3^x+3^{-x}$ とおくと $t \geqq \boxed{2}$ であり，t は 2 以上のすべての実数値をとり得る．また

$$\begin{aligned} t^2 &= (3^x+3^{-x})^2 \\ &= (3^x)^2+2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}+(3^{-x})^2 \\ &= 9^x+2+9^{-x} \end{aligned}$$

☞　$(3^x)^2=3^{2x}=(3^2)^x=9^x$.
同様に，$(3^{-x})^2=9^{-x}$.

より

$$9^x+9^{-x}=t^2-\boxed{2}$$

と表されるから，$f(x)$ を t を用いて表すと

$$\begin{aligned} f(x) &= (9^x+9^{-x})+2(3^x+3^{-x})+1 \\ &= (t^2-2)+2t+1 \\ &= t^2+\boxed{2}\,t-\boxed{1} \end{aligned}$$

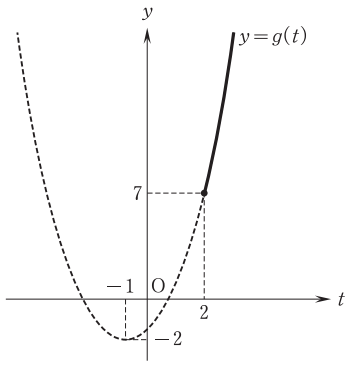
となる．よって，$g(t)=t^2+2t-1$ とおくと

「x がすべての実数値をとるときの $f(x)$ の最小値」

は

「$t \geqq 2$ における $g(t)$ の最小値」

と等しい．



☞　$g(t)=(t+1)^2-2$.

グラフより，$t \geqq 2$ において $g(t)$ は $t=2$ のとき最小値 7 をとることがわかるから，$f(x)$ は $x=\boxed{0}$ のとき最小値 $\boxed{7}$ をとる．

☜ $t=2$ が成り立つのは，$x=0$ のときのみである．

(3) 方程式 $f(x)=14$ を t を用いて表すと

$$g(t)=14 \quad \text{すなわち} \quad t^2+2t-15=0$$

☜ $g(t)=t^2+2t-1$.

となる．

$$(t+5)(t-3)=0$$

より

$$t=-5,\ 3.$$

ここで $t \geqq 2$ より，$t=3$ であるから

$$3^x+3^{-x}=3$$

となる．

さらに，$u=3^x$ (>0) とおくと $u+\dfrac{1}{u}=3$ であり，両辺に u を掛けて整理すると

☜ $3^{-x}=\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{1}{u}$.

$$u^2-3u+1=0$$

となるから

$$u=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

である．これは $u>0$ を満たす．よって

☜ $u=3^x>0$.

$$3^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

であるから

$$x=\log_3\left(\frac{\boxed{3}\pm\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}\right)$$

である．

〔2〕

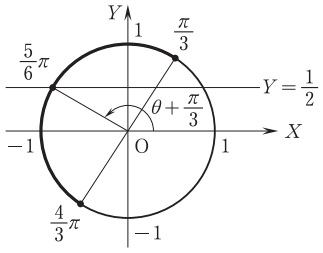
(1) $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=\boxed{1}$.

(2) 方程式 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}$ は $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ である．

☜ $g(\theta)=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ であるから，$g(\theta)=\dfrac{1}{2}$ の解は，$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$ より $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{2}}$ である．

☜



(3) $g(\theta)=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\sin\theta+\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}\cos\theta$$

であるから

$$h(\theta)=\sin\theta+g(\theta)$$

$$=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

$$=\sqrt{\boxed{3}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{6}}\right)$$

である．

よって，θ の方程式 $h(\theta)=k$ は

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

と変形できる．

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ であるから，$h(\theta)=k$ を満たす異なる二つの θ の値が存在するような k の値の範囲は

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{k}{\sqrt{3}}<1$$

すなわち

$$\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}\leqq k<\sqrt{\boxed{3}}$$

である．このとき $h(\theta)=k$ を満たす θ のうち大きい方を α とすると，α のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

すなわち

$$\frac{\pi}{\boxed{3}}<\alpha\leqq\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi$$

である．

加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

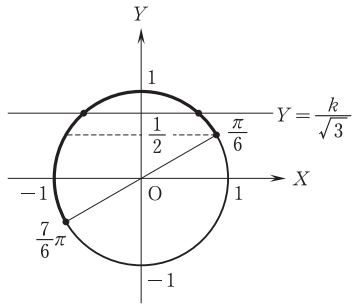
三角関数の合成

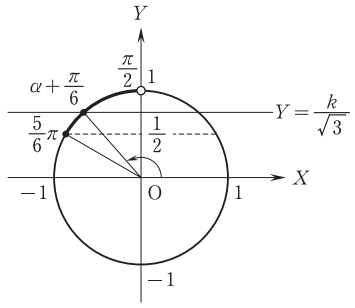
$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

ただし

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$





第 2 問　微分法・積分法

p を正の実数として，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=2x^3-3px^2+2p$$

とする．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イ}}px$$

であり，$f(x)$ は

極大値 $\boxed{\text{ウ}}p$

極小値 $\boxed{\text{エ}}p^{\boxed{\text{オ}}}+\boxed{\text{カ}}p$

をとる．

(1)　$f(x)$ の極大値が 2 のとき，$p=\boxed{\text{キ}}$ である．このとき，$0\leqq x\leqq 2$ において $f(x)$ は

$x=\boxed{\text{ク}}$ で最大値 $\boxed{\text{ケ}}$

$x=\boxed{\text{コ}}$ で最小値 $\boxed{\text{サ}}$

をとる．

(2)　$f(x)$ の極小値が -4 のとき，$p=\boxed{\text{シ}}$ である．以下 $p=\boxed{\text{シ}}$ とし，このときの曲線 $y=f(x)$ を C とする．

C 上の点 $(1,\ f(1))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{スセ}}x+\boxed{\text{ソ}}$$

であり，$g(x)=\boxed{\text{スセ}}x+\boxed{\text{ソ}}$ とすると

$$f(x)-g(x)=\boxed{\text{タ}}\left(x-\boxed{\text{チ}}\right)^{\boxed{\text{ツ}}}$$

であるから，$0\leqq x\leqq\boxed{\text{チ}}$ において，$f(x)\leqq g(x)$ が成り立つ．

よって，C と ℓ と y 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．

【解説】

$$f(x)=2x^3-3px^2+2p\quad(p>0)$$

の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{6}x^2-\boxed{6}px$$
$$=6x(x-p)$$

である．よって，$p>0$ に注意すると，$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

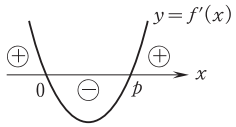
☜ **導関数**

$(x^n)'=nx^{n-1}$　(n は自然数)，

$(c)'=0$　(c は定数)．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2p$	$\searrow$	$-p^3+2p$	$\nearrow$

☜ $f'(x)$ の符号の変化は $y=f'(x)$ のグラフをかくとわかりやすい．



よって，$f(x)$ は

極大値 $\boxed{2}\,p$

極小値 $\boxed{-}\,p^{\boxed{3}}+\boxed{2}\,p$

をとる．

(1) $f(x)$ の極大値が 2 のとき，$2p=2$ より，$p=\boxed{1}$ であり，

☜ （極大値）$=2p$.

これは $p>0$ を満たす．このとき

$$f(x)=2x^3-3x^2+2$$

より

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

であるから，$0\leqq x\leqq 2$ において $f(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

よって，$0\leqq x\leqq 2$ において $f(x)$ は

$x=\boxed{2}$ で最大値 $\boxed{6}$

$x=\boxed{1}$ で最小値 $\boxed{1}$

をとる．

(2) $f(x)$ の極小値が -4 となるときの p の値は

☜ （極小値）$=-p^3+2p$.

$$-p^3+2p=-4$$

を満たす正の実数である．

$$p^3-2p-4=0$$

より

$$(p-2)(p^2+2p+2)=0$$

☜ $h(p)=p^3-2p-4$ とすると，$h(2)=0$ であるから，$h(p)$ は $p-2$ で割り切れる．

となり，さらに $p>0$ より $p^2+2p+2>0$ であるから $p=2$.

これは $p>0$ を満たすから

$$p=\boxed{2}$$

である．

このとき

$$f(x)=2x^3-6x^2+4$$

より

$$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$$

である．曲線 $y=f(x)$ を C とすると，C 上の点 $(1,\ 0)$ における C の接線 ℓ の方程式は，$f'(1)=6\cdot1\cdot(1-2)=-6$ より

☜ $f(1)=2\cdot1^3-6\cdot1^2+4=0.$

$$y=-6(x-1)$$
$$=\boxed{-6}x+\boxed{6}$$

である．$g(x)=-6x+6$ とすると

$$f(x)-g(x)=(2x^3-6x^2+4)-(-6x+6)$$
$$=2(x^3-3x^2+3x-1)$$
$$=\boxed{2}\left(x-\boxed{1}\right)^{\boxed{3}}$$

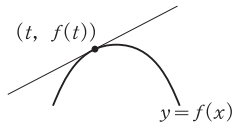
より，$0\leqq x\leqq1$ において，$f(x)\leqq g(x)$ が成り立つ．

☜ **接線の方程式**

点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

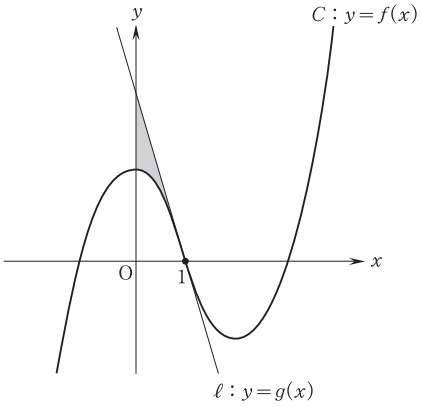
$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

である．



☜ $0\leqq x\leqq1$ のとき

$f(x)-g(x)=2(x-1)^3\leqq0.$

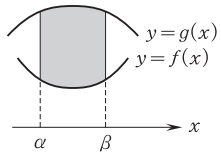


よって，C と ℓ と y 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_0^1\{g(x)-f(x)\}\,dx$$
$$=-2\int_0^1(x^3-3x^2+3x-1)\,dx$$
$$=-2\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right]_0^1$$
$$=-2\left(\frac{1}{4}-1+\frac{3}{2}-1\right)$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ **面積**



上図の影の部分の面積は

$$\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}\,dx$$

である．

【$\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ の別解】

$$\int (x-a)^n\,dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

（n は正の整数，a は定数，C は積分定数）

を用いて，次のように S を求めてもよい．

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{g(x) - f(x)\}\,dx \\ &= -2\int_0^1 (x-1)^3\,dx \\ &= -2\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 \\ &= -2\cdot\frac{1}{4}\{0^4 - (-1)^4\} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

第3問　数　列

等差数列 $\{a_n\}$ において

$$\begin{cases} a_3 - a_1 = -6 \\ a_2 + a_4 = 68 \end{cases}$$

が成り立っている．このとき，初項 a_1 は $\boxed{\text{アイ}}$ であり，公差は $\boxed{\text{ウエ}}$ であるから，一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{オカ}} - \boxed{\text{キ}}\,n$$

である．また，自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とすると

$$S_n = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\,n\left(\boxed{\text{ケコ}} - \boxed{\text{サ}}\,n\right)$$

である．

(1)　$a_n > 0$ を満たす自然数 n の値の範囲は $1 \leqq n \leqq \boxed{\text{シス}}$ であるから，S_n の最大値は $\boxed{\text{セソタ}}$ である．

(2)　自然数 n に対して $T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とする．

$$1 \leqq n \leqq \boxed{\text{チツ}} \text{ のとき，} T_n = \boxed{\text{テ}}$$

であり

$$\boxed{\text{チツ}} < n \text{ のとき，} T_n = \boxed{\text{トナニ}} - \boxed{\text{ヌ}}$$

であるから，$T_n > 500$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{ネノ}}$ である．

ただし，$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪　a_n　　①　$2a_n$　　②　S_n

③　$2S_n$　　④　S_{n+1}　　⑤　S_{2n}

【解説】

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$\begin{cases} a_3 - a_1 = -6 \\ a_2 + a_4 = 68 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} (a_1 + 2d) - a_1 = -6 \\ (a_1 + d) + (a_1 + 3d) = 68 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} d = -3 \\ a_1 + 2d = 34 \end{cases}$$

であるから，初項 a_1 は $\boxed{40}$，公差 d は $\boxed{-3}$ である．

☞ **等差数列の一般項**

初項 a_1，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

☞ $a_1 = 34 - 2d$
$= 34 - 2\cdot(-3)$
$= 40.$

よって，一般項 a_n は

$$a_n = 40 + (n-1)\cdot(-3)$$
$$= \boxed{43} - \boxed{3}\,n \qquad \cdots ①$$

である．また，自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= \frac{n}{2}\{40 + (43 - 3n)\}$$
$$= \frac{1}{\boxed{2}}n\left(\boxed{83} - \boxed{3}\,n\right) \qquad \cdots ②$$

である．

☜ **等差数列の和**

等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和は

$$\frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(1) ① より，$a_n > 0$ は

$$43 - 3n > 0$$

であるから，これを変形すると

$$n < \frac{43}{3}$$

となる．よって，$a_n > 0$ を満たす自然数 n の値の範囲は

$$1 \leqq n \leqq \boxed{14}$$

である．このことより，S_n について

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_{13} < S_{14} > S_{15} > S_{16} > \cdots \qquad \cdots ③$$

が成り立つから，S_n の最大値は

$$S_{14} = \frac{14}{2}(a_1 + a_{14})$$
$$= 7(40 + 1)$$
$$= \boxed{287} \qquad \cdots ④$$

である．

☜ $\frac{43}{3} = 14 + \frac{1}{3}$ であるから

$$\begin{cases} a_n > 0 \iff 1 \leqq n \leqq 14 \\ a_n < 0 \iff 14 < n \end{cases}$$

である．

☜ ① より，$a_{14} = 43 - 3\cdot 14$
$= 1.$

(2) $T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について考える．

(1) より，自然数 k について

$$\begin{cases} a_k > 0 \iff 1 \leqq k \leqq 14 \\ a_k < 0 \iff 14 < k \end{cases}$$

が成り立つから

$$|a_k| = \begin{cases} a_k & (1 \leqq k \leqq 14) \\ -a_k & (14 < k) \end{cases}$$

である．よって，$1 \leqq n \leqq \boxed{14}$ のとき

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$$

となり，$\boxed{テ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．また

$14 < n$ のとき

☜
$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & > & a_2 & > \cdots > & a_{14} & > 0 > & a_{15} & > \cdots \\ \| & & \| & & \| & & \| & \\ 40 & & 37 & \cdots & 1 & & -2 & \cdots \end{array}$$

☜ 実数 x について

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{14}a_k+\sum_{k=15}^{n}(-a_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{14}a_k-\sum_{k=15}^{n}a_k$$
$$=S_{14}-(S_n-S_{14})$$
$$=2S_{14}-S_n$$
$$=\boxed{574}-S_n \quad \cdots ⑤$$

☜ $14<n$ のとき
$\sum_{k=15}^{n}a_k$
$=a_{15}+a_{16}+\cdots+a_n$
$=(a_1+\cdots+a_{14}+a_{15}+\cdots+a_n)$
$-(a_1+\cdots+a_{14})$
$=S_n-S_{14}$.

☜ ④ より，$S_{14}=287$.

より，$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

ここで，③ より

$$S_1<S_2<\cdots<S_{13}<S_{14}=287$$

であり，$1\leqq n\leqq 14$ のとき，$T_n=S_n$ であるから，$T_n>500$ を満たすためには $n>14$ が必要である．このとき，⑤ より，$T_n>500$ は

$$574-S_n>500$$

すなわち

$$S_n<74 \quad \cdots ⑥$$

となる．これと，③ より

$$S_{15}>S_{16}>S_{17}>\cdots$$

☜ $15\leqq n$ においては数列 $\{S_n\}$ は減少数列である．

であることと，さらに

$$S_{25}=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 8=100$$

☜ ② より，$S_n=\frac{1}{2}n(83-3n)$.

$$S_{26}=\frac{1}{2}\cdot 26\cdot 5=65$$

であることを考えあわせれば，$n>14$ のもとで ⑥ を満たす最小の自然数 n は 26 である．よって，$T_n>500$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{26}$ である．

第 4 問　平面ベクトル

三角形 OAB において，辺 AB の中点を M，線分 AM の中点を N とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．

点 N を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を H とする．点 H は直線 OB 上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{NH}}=\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(k-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．

以下，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\sqrt{3}$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{シ}}$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{NH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{ス}}$ であるから，$k=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

次に，直線 OM と直線 NH の交点を P とする．点 P は直線 NH 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{NP}}=s\overrightarrow{\mathrm{NH}}$ と表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\left(\boxed{\text{ツ}}-s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナ}}+2s\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

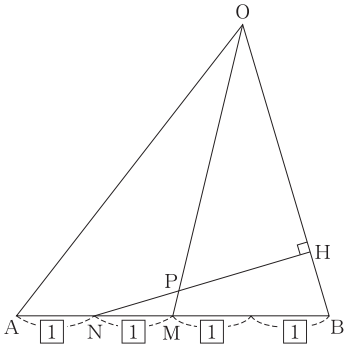
となる．また，点 P は直線 OM 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と表すと

$$s=\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}},\quad t=\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$$

となる．

三角形 OAB の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$ であるから，三角形 PNM の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である．

【解説】



辺 AB の中点が M であるから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) \quad \cdots ①$$

である．さらに，線分 AM の中点が N であるから，点 N は辺 AB を 1：3 に内分する点である．よって

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\overrightarrow{OB} \quad \cdots ②$$

である．

内分点の位置ベクトル

点 Q が線分 AB を $m:n$ の比に内分するとき

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

点 M が線分 AB の中点のとき

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

点 N を通り直線 OB に垂直な直線と直線 OB の交点が H である．点 H が直線 OB 上にあることから，実数 k を用いて $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OB}$ と表されるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NH}&=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{ON}\\&=k\overrightarrow{OB}-\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\frac{\boxed{-3}}{\boxed{4}}\overrightarrow{OA}+\left(k-\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\right)\overrightarrow{OB} \quad \cdots ③\end{aligned}$$

となる．

$OA=2$，$OB=\sqrt{3}$，$\cos\angle AOB=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB\\&=2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\\&=\boxed{2}\end{aligned}$$

である．

ベクトルの内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

である．

また，$\overrightarrow{NH}$ と $\overrightarrow{OB}$ が垂直であることから

$$\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{0}$$

である．これと ③ より

垂直条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

$$\left\{-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(k-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(k-\frac{1}{4}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0$$

となるが，さらに $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{3}$ を用いて

$$-\frac{3}{2}+3\left(k-\frac{1}{4}\right)=0$$

すなわち

$$k=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

となる．これと ③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{NH}}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ④$$

である．

直線 OM と直線 NH の交点が P である．点 P は直線 NH 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{NP}}=s\overrightarrow{\mathrm{NH}}$ と表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{NP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{ON}}+s\overrightarrow{\mathrm{NH}}\end{aligned}$$

となる．さらに，②，④ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\left(\boxed{1}-s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\left(\boxed{1}+2s\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ⑤\end{aligned}$$

となる．

また，点 P は直線 OM 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と表される．これと ① より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ⑥$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，⑤，⑥ より

$$\frac{3}{4}(1-s)=\frac{t}{2},\quad \frac{1}{4}(1+2s)=\frac{t}{2}$$

☜ α，β，α'，β' が実数であり，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$$
$$\Longleftrightarrow\ \alpha=\alpha',\ \beta=\beta'.$$

すなわち

$$s=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}},\quad t=\frac{\boxed{9}}{\boxed{10}}$$

である．

三角形 OAB の面積を S とする．$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ より

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4\times3-4}$$

$$=\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

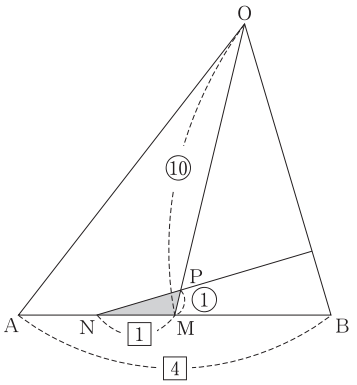
ところで，$t=\frac{9}{10}$ より $\overrightarrow{OP}=\frac{9}{10}\overrightarrow{OM}$ であるから

$$PM=\frac{1}{10}OM$$

である．また

$$NM=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB\right)=\frac{1}{4}AB$$

である．



よって，三角形 PNM の面積を T とすると

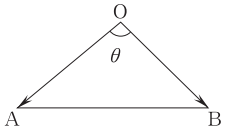
$$T=\frac{NM}{AB}\cdot\frac{PM}{OM}\cdot S$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{40}}$$

である．

☜ **三角形の面積**



上図の三角形 OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}.$$