セ ン タ ー 模 擬 試 験

第３回　数学　ＩＡ

解説と解答

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア$\pm\sqrt{イ}$	$1\pm\sqrt{3}$	4	
	ウ	2	3	
	エ$\sqrt{オ}$	$2\sqrt{3}$	3	
	カ	1	5	
	キク	60	3	
	$\frac{ケ\sqrt{コサ}}{シス}$	$\frac{5\sqrt{13}}{26}$	3	
	$\sqrt{セソ}$	$\sqrt{13}$	3	
	タ	1	3	
	チ$\sqrt{ツ}$	$4\sqrt{3}$	3	
第1問 自己採点小計			(30)	
第2問	（ア，イ）	（2，5）	2	
	ウb^2－エb＋オ	$3b^2-6b+1$	2	
	カ	1	2	
	キク	－2	2	
	ケ	1	2	
	コ	3	2	
	サ	7	2	
	シス$\leqq x \leqq$セ	$-2\leqq x\leqq 6$	2	
	$\frac{ソ}{タ}$	$\frac{1}{7}$	2	
	チ$\pm\sqrt{ツ}$	$1\pm\sqrt{3}$	2	
	テト	13	2	
	ナニ.ヌ	13.5	2	
	ネノ	10	2	
	ハ	2	2	
	ヒ	2	2	
第2問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	アイウ	455	3	
	エ	5	3	
	オカ	36	4	
	$\frac{キ}{クケ}$	$\frac{1}{91}$	3	
	$\frac{コサ}{シス}$	$\frac{54}{91}$	3	
	$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{1}{5}$	4	
第3問 自己採点小計			(20)	
第4問	ア	7	1	
	イウ	15	1	
	エ	6	3	
	（オ，カ）	（3，1）	2	
	（キク，ケ）	（18，8）	2	
	（コサ，シ）	（13，6）	3	
	スセ	15	3	
	ソタ	92	2	
	チツ	86	3	
第4問 自己採点小計			(20)	
第5問	$\sqrt{ア}$	$\sqrt{3}$	3	
	イ	5	3	
	ウエ	60	3	
	オ	3	3	
	$\frac{カ}{キ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ク}{ケ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	コ	6	4	
第5問 自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第1問　数と式，三角比

〔1〕 x の2次方程式 $x^2-2x-2=0$ の解は

$$x=\boxed{\text{ア}}\pm\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

であり

$$\alpha=\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

とすると

$$\alpha-\frac{2}{\alpha}=\boxed{\text{ウ}},\quad \alpha+\frac{2}{\alpha}=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

さらに，実数 x に関する条件 p，q を次のように定める．

$$p:|x-\alpha|<\frac{2}{\alpha}$$

$$q:(x-2)(x-4)\leqq 0$$

このとき，q は p であるための $\boxed{\text{カ}}$．

$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　必要十分条件である
①　必要条件であるが，十分条件ではない
②　十分条件であるが，必要条件ではない
③　必要条件でも十分条件でもない

〔2〕 △ABC において，AB＝3，BC＝4，CA＝$\sqrt{13}$ とする．

このとき，余弦定理より

$$\angle\mathrm{ABC}=\boxed{\text{キク}}^\circ,\quad \cos\angle\mathrm{BCA}=\frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シス}}}$$

である．

線分 CA の垂直二等分線と △ABC の外接円の二つの交点のうち，直線 CA に関して点 B と同じ側にある点を D とする．

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\boxed{\text{セソ}}},\quad \mathrm{BD}=\boxed{\text{タ}}$$

であり，四角形 ABDC の面積は $\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

【解説】

〔1〕

2次方程式 $x^2-2x-2=0$ の解は，

$$x=\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{3}}$$

であり，$\alpha=1+\sqrt{3}$ であるから，

☜ 2次方程式

$$ax^2+2b'x+c=0$$

の解は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

$$\frac{2}{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

☜ 分母の有理化.

$$=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

$$=\sqrt{3}-1$$

である.

よって,

$$\alpha-\frac{2}{\alpha}=(1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)$$

$$=\boxed{\ 2\ },$$

$$\alpha+\frac{2}{\alpha}=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)$$

$$=\boxed{\ 2\ }\sqrt{\boxed{\ 3\ }}$$

である.

不等式 $|x-\alpha|<\dfrac{2}{\alpha}$ の解は,

$$-\frac{2}{\alpha}<x-\alpha<\frac{2}{\alpha}$$

☜ $|A|<B \iff -B<A<B.$

$$\alpha-\frac{2}{\alpha}<x<\alpha+\frac{2}{\alpha}$$

より,

$$2<x<2\sqrt{3}$$

であり,不等式 $(x-2)(x-4)\leqq 0$ の解は,

$$2\leqq x\leqq 4$$

である.

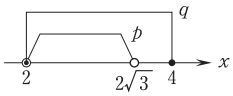
したがって,

$$p:2<x<2\sqrt{3},\quad q:2\leqq x\leqq 4.$$

$\sqrt{3}<2$ より $2\sqrt{3}<4$ であるから,

「$q \Longrightarrow p$」は偽

☜



であり,

「$p \Longrightarrow q$」は真

である.

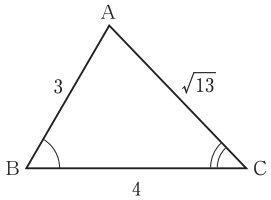
ゆえに,q は p であるための必要条件であるが,十分条件ではない,すなわち $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である.

☜ 条件 s, t において,

$$s \Longrightarrow t$$

が真のとき,s は t であるための十分条件であり,t は s であるための必要条件である.

〔2〕



余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{3^2+4^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot3\cdot4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{ABC}=\boxed{60}^\circ$$

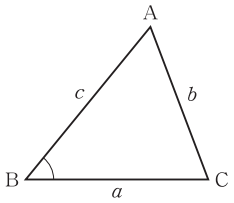
である．

また，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{BCA}=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}$$
$$=\frac{4^2+(\sqrt{13})^2-3^2}{2\cdot4\cdot\sqrt{13}}$$
$$=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{26}}$$

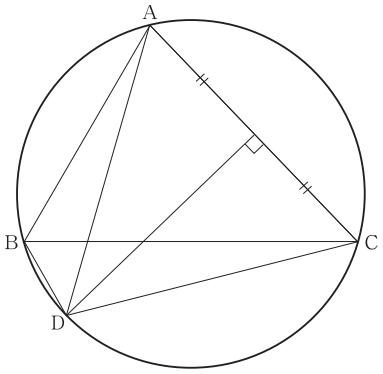
である．

☞ **余弦定理**



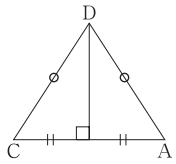
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$



点 D は線分 CA の垂直二等分線上にあるから，△ADC は DA＝DC の二等辺三角形である．

☞

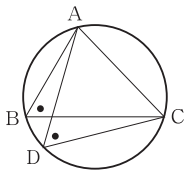


また，円周角の定理より，

$$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ABC}$$
$$=60^\circ$$

であるから，△ADC は正三角形である．

☞



よって，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{CA}$$
$$=\sqrt{\boxed{13}}$$

である．

$\mathrm{BD}=x$ とおき，△ABD に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BD}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{BDA}.$$

円周角の定理より，$\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{BCA}$ であり，

$$\cos\angle\mathrm{BDA}=\cos\angle\mathrm{BCA}$$
$$=\frac{5\sqrt{13}}{26}$$

であるから，

$$3^2=x^2+(\sqrt{13})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{26}$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$

であり，$0<x<\mathrm{AD}=\sqrt{13}$ より，

$$x=1$$

すなわち

$$\mathrm{BD}=\boxed{1}$$

である．

$$\sin\angle\mathrm{BDA}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BDA}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{13}}{26}\right)^2}$$
$$=\frac{3\sqrt{39}}{26}$$

であるから，△ABD の面積は，

$$\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BDA}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3\sqrt{39}}{26}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である．

また，△ADC は一辺の長さが $\sqrt{13}$ の正三角形であるから，その面積は，

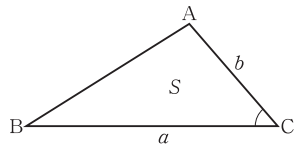
$$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{13})^2\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{13\sqrt{3}}{4}$$

である．

☞ $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CBD}$
$=\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CAD}$
$=60^\circ+60^\circ$
$=120^\circ$
であるから，△ABD に余弦定理を用いると，
$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos\angle\mathrm{ABD}$
$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$
$x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
であり，$x>0$ より，
$x=1$
としてもよい．

☞ $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$
正弦定理で求めてもよい．

☞ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$

☞ $\angle\mathrm{ABD}=120^\circ$
であるから，
$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{ABD}$
$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$
としてもよい．

よって，四角形 ABDC の面積は，

$$(\triangle \mathrm{ABD} \text{ の面積}) + (\triangle \mathrm{ADC} \text{ の面積})$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

$$= \boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

第 2 問　2 次関数，データの分析

〔1〕 a，b を実数とし，$a>0$ とする．x の 2 次関数

$$y=x^2-4x+9 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$y=ax^2+2ax+a+3b^2-6b+1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする．

G_1 の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$$

である．

また，G_2 の頂点の y 座標を Y とすると

$$Y=\boxed{\text{ウ}}\,b^2-\boxed{\text{エ}}\,b+\boxed{\text{オ}}$$

であり，Y は $b=\boxed{\text{カ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとる．

(1) $b=\boxed{\text{カ}}$ とする．G_2 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると G_1 と一致するとき

$$a=\boxed{\text{ケ}},\quad p=\boxed{\text{コ}},\quad q=\boxed{\text{サ}}$$

である．

(2) 関数 ① について，$y\leqq 21$ となるような x の値の範囲は

$$\boxed{\text{シス}}\leqq x\leqq\boxed{\text{セ}}$$

であり，$\boxed{\text{シス}}\leqq x\leqq\boxed{\text{セ}}$ における関数 ② の最大値が 14，最小値が 7 であるとすると

$$a=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad b=\boxed{\text{チ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．

〔2〕 10 人の生徒に P と Q の 2 種類の数学のテストを行った．ただし，どちらのテストも得点は 0 以上 20 以下の整数である．

以下，小数の形で解答する場合は，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

また，四分位数とは，データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値であり，小さい方から順に，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数という．第 2 四分位数は中央値である．データの大きさが偶数のときは，データを値の大きさの順に並べて 2 等分したときの下位のデータの中央値が第 1 四分位数，上位のデータの中央値が第 3 四分位数である．

テスト P の得点は次の表のようになった．

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
テスト P の得点	4	8	10	11	13	14	16	17	18	19

(1) テスト P の得点の平均値は $\boxed{\text{テト}}$ 点であり

中央値は $\boxed{\text{ナニ}}.\boxed{\text{ヌ}}$ 点，第 1 四分位数は $\boxed{\text{ネノ}}$ 点

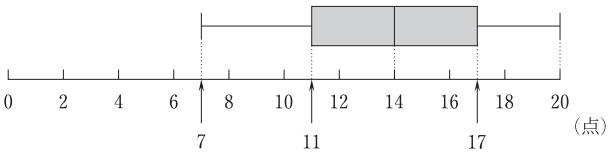
である．

(2) テストＰの採点を見直したところ，採点に間違いがあり，正しくは番号 3 の生徒の得点は 9 点，番号 7 の生徒の得点は 17 点であった．この間違いを修正したとき，テストＰの得点の分散は $\boxed{\text{ハ}}$ する．

$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪ 修正前より減少　　① 修正前と一致　　② 修正前より増加

(3) テストＱの得点に関する箱ひげ図は次のようになった．



四分位範囲で考えると，修正後のテストＰのデータとテストＱのデータについては $\boxed{\text{ヒ}}$．

$\boxed{\text{ヒ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪ 得点の散らばりの度合いは同じであるといえる
① テストＰよりテストＱの方が得点の散らばりの度合いは大きいといえる
② テストＱよりテストＰの方が得点の散らばりの度合いは大きいといえる

【解説】

〔1〕

$$y=x^2-4x+9, \qquad \cdots ①$$

$$y=ax^2+2ax+a+3b^2-6b+1. \qquad \cdots ②$$

① より，

$$y=(x-2)^2+5$$

であるから，G_1 の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2},\ \boxed{5}\right)$$

である．

☜ 放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は，

$(p,\ q)$.

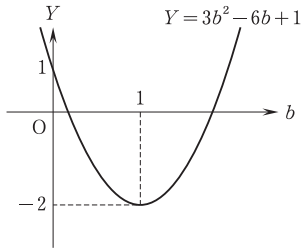
② より，

$$y=a(x^2+2x+1)+3b^2-6b+1$$
$$=a(x+1)^2+3b^2-6b+1 \qquad \cdots ③$$

であるから，

$$Y=\boxed{3}b^2-\boxed{6}b+\boxed{1}$$
$$=3(b^2-2b)+1$$
$$=3\{(b-1)^2-1\}+1$$
$$=3(b-1)^2-2$$

☜



であり，Y は，

$b=\boxed{1}$ のとき，最小値 $\boxed{-2}$

をとる．

(1)　$b=1$ のとき，③ は，

$$y=a(x+1)^2-2$$

であるから，G_2 の頂点の座標は，

$$(-1,\ -2)$$

である．

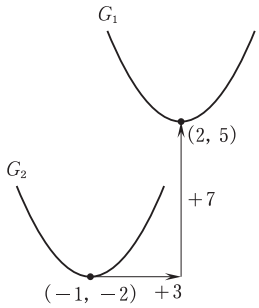
G_2 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると G_1 と一致するとき，

$$a=\boxed{1},$$

☜　① と ② の x^2 の係数は等しい．

$$p=2-(-1)=\boxed{3},\quad q=5-(-2)=\boxed{7}$$

☜



である．

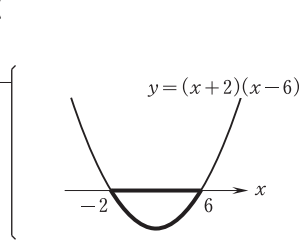
(2)　関数 ① について，$y \leqq 21$ となるような x の値の範囲は，

$$x^2-4x+9 \leqq 21$$
$$x^2-4x-12 \leqq 0$$
$$(x+2)(x-6) \leqq 0$$

より，

$$\boxed{-2} \leqq x \leqq \boxed{6}$$

☜

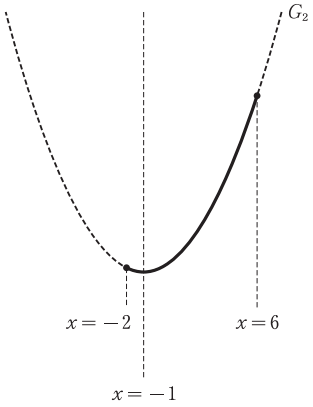


である．

③ より，G_2 の軸の方程式は，

$$x=-1$$

であり，$a>0$ より，G_2 は下に凸の放物線である．



上図より，$-2 \leqq x \leqq 6$ において，関数 ② は，

$x=6$ で最大値，

$x=-1$ で最小値

をとるから，最大値が 14，最小値が 7 であるとき，

$$\begin{cases} a(6+1)^2+3b^2-6b+1=14, & \cdots ④ \\ 3b^2-6b+1=7 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

☜　③ において $x=6$，$y=14$ とした．

☜　③ において $x=-1$，$y=7$ とした．

である．

④，⑤ の辺々を引いて，

$$49a=7$$

$$a=\frac{\boxed{1}}{\boxed{7}}\quad(a>0\ \text{を満たす})$$

であり，⑤より，

$$3b^2-6b-6=0$$
$$b^2-2b-2=0$$
$$b=\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

☞ 2次方程式

$$ax^2+2b'x+c=0$$

の解は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

〔2〕

(1) テストPの得点の平均値は，

$$\frac{4+8+10+11+13+14+16+17+18+19}{10}$$
$$=\frac{130}{10}$$
$$=\boxed{13}\ (\text{点})$$

である．

☞ **平均値**

変量 x についてのデータの値が，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n であるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

テストPの得点を小さい方から順に並べると，

$$4,\ 8,\ 10,\ 11,\ \underset{5\text{番目}}{13},\ \underset{6\text{番目}}{14},\ 16,\ 17,\ 18,\ 19\qquad\cdots(*)$$

となり，その中央値は，5番目と6番目の値の平均値であるから，その値は，

$$\frac{13+14}{2}=\boxed{13}.\boxed{5}\ (\text{点})$$

である．

☞ **中央値**

データを値の大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．データの大きさが偶数のときは，中央に並ぶ2つの値の平均値を中央値とする．

(*)の下位のデータ

「4，8，10，11，13」

の中央値が第1四分位数であり，その値は $\boxed{10}$ 点である．

(2) 修正前の番号3の生徒と7の生徒の得点の和は，

$$10+16=26\ (\text{点})$$

であり，修正後の番号3の生徒と7の生徒の得点の和は，

$$9+17=26\ (\text{点})$$

であるから，データの値の総和は変化しない．

よって，修正後の平均値は修正前と変わらず13点であり，偏差の2乗が変化するのは番号3の生徒と番号7の生徒だけである．

修正前の番号3の生徒と7の生徒の偏差の2乗の和は，

$$(10-13)^2+(16-13)^2=18$$

であり，修正後の番号3の生徒と7の生徒の偏差の2乗の和は，

$$(9-13)^2+(17-13)^2=32$$

であるから，データの値の偏差の2乗の総和は増加している．

偏差・分散

変量 x についてのデータの値を x_1，x_2，…，x_n とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，(これらの)偏差の2乗の平均値が x の分散 s^2 となる．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

☞ 平均値が修正前と修正後で一致しているから，修正していない8個については偏差の2乗の和は変化しないので，修正の箇所についての偏差の2乗の和を調べるとよい．

よって，修正後の分散は修正前より増加するから，$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

【参考】

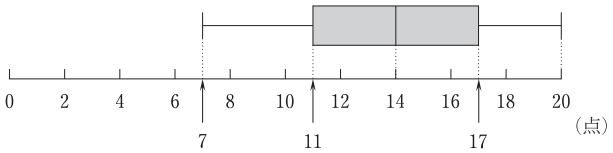
修正前のテスト P の得点の分散は，

$$\frac{1}{10}\{(4-13)^2+(8-13)^2+(10-13)^2+(11-13)^2+(13-13)^2$$
$$+(14-13)^2+(16-13)^2+(17-13)^2+(18-13)^2+(19-13)^2\}$$
$$=\frac{206}{10}$$
$$=20.6.$$

修正後のテスト P の得点の分散は，

$$\frac{1}{10}\{(4-13)^2+(8-13)^2+(9-13)^2+(11-13)^2+(13-13)^2$$
$$+(14-13)^2+(17-13)^2+(17-13)^2+(18-13)^2+(19-13)^2\}$$
$$=\frac{220}{10}$$
$$=22.0.$$

(3) テスト Q の得点に関する箱ひげ図



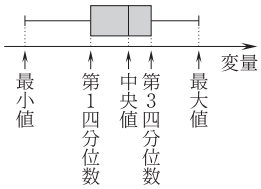
上図より，テスト Q の得点に関して，

第 1 四分位数は 11 点，

第 3 四分位数は 17 点

である．

☞ 下図のように，最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値を箱と線(ひげ)を用いて 1 つの図に表したものを箱ひげ図という．



よって，テスト Q の四分位範囲は，

$$17-11=6\ (\text{点})$$

である．

☞ **四分位範囲**

$$\begin{pmatrix}\text{四分位}\\\text{範囲}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{第 3 四}\\\text{分位数}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{第 1 四}\\\text{分位数}\end{pmatrix}.$$

修正後のテスト P の四分位範囲を調べる．

修正後のテスト P の得点を小さい方から順に並べると，

$$\underbrace{4,\ 8,\ 9,\ 11,\ 13}_{\text{下位のデータ}},\ \underbrace{14,\ 17,\ 17,\ 18,\ 19}_{\text{上位のデータ}}.$$

第 1 四分位数は下位のデータの中央値であるから，9 点である．

第 3 四分位数は上位のデータの中央値であるから，17 点である．

よって，修正後のテスト P の四分位範囲は，

$$17-9=8\ (\text{点})$$

である．

したがって，テストＱよりテストＰの方が四分位範囲が大きいから，四分位範囲で考えると，テストＱよりテストＰの方が得点の散らばりの度合いは大きいといえる．

ゆえに，［ヒ］に当てはまるものは［②］である．

☜ 四分位範囲は，データの散らばりの度合いを表す１つの量であり，これが大きいほど散らばりの度合いが大きいと考えられる．

第3問　場合の数，確率

箱の中にハート，ダイヤ，スペードのマークが付けられたカードが5枚ずつ合計15枚入っている．カードには各マークごとに1から5までの数字が書かれている(下図参照)．ただし，例えば $\boxed{♥1}$ は，数字1が書かれたハートマークのカードを表す．

$\boxed{♥1}$ $\boxed{♥2}$ $\boxed{♥3}$ $\boxed{♥4}$ $\boxed{♥5}$
$\boxed{◆1}$ $\boxed{◆2}$ $\boxed{◆3}$ $\boxed{◆4}$ $\boxed{◆5}$
$\boxed{♠1}$ $\boxed{♠2}$ $\boxed{♠3}$ $\boxed{♠4}$ $\boxed{♠5}$

この箱から同時に3枚のカードを取り出す．

(1)　カードの取り出し方は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある．

このうち，カードの数字がすべて同じであるカードの取り出し方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りであり，数字1が書かれたカードがちょうど2枚であるカードの取り出し方は $\boxed{\text{オカ}}$ 通りである．

(2)　取り出したカードの数字がすべて同じとなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ であり，取り出したカードの数字がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．

取り出したカードの数字が2種類であるという条件のもとで，数字1が書かれたカードがちょうど2枚である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

【解説】

(1)　カードの取り出し方は全部で，

$$ {}_{15}C_3 = \frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1} $$
$$ = \boxed{455} \text{（通り）} $$

ある．

このうち，カードの数字がすべて同じである取り出し方は，

$$ \boxed{5} \text{（通り）} \quad \cdots ① $$

である．

{$\boxed{♥1}$, $\boxed{◆1}$, $\boxed{♠1}$},
{$\boxed{♥2}$, $\boxed{◆2}$, $\boxed{♠2}$},
{$\boxed{♥3}$, $\boxed{◆3}$, $\boxed{♠3}$},
{$\boxed{♥4}$, $\boxed{◆4}$, $\boxed{♠4}$},
{$\boxed{♥5}$, $\boxed{◆5}$, $\boxed{♠5}$}.

数字1が書かれたカードがちょうど2枚となるのは，$\boxed{♥1}$，$\boxed{◆1}$，$\boxed{♠1}$ から2枚取り出し，残りの12枚のカードの中から1枚取り出すときであるから，カードの取り出し方は，

$$ {}_3C_2\cdot{}_{12}C_1 = 3\cdot12 $$
$$ = \boxed{36} \text{（通り）} \quad \cdots ② $$

である．

(2)　取り出したカードの数字がすべて同じとなる確率は，① より，

$$ \frac{5}{455} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{91}} \quad \cdots ③ $$

である．

取り出したカードの数字がすべて異なるカードの取り出し方は，カードの数字の選び方が，

$$ {}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} $$
$$ = 10 \text{（通り）} $$

であり，マークの選び方が，

$$ 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{（通り）} $$

であるから，

$$ 10 \cdot 27 = 270 \text{（通り）} $$

ある．

☜ 1つの数字に対してマークの選び方は3通り．

よって，取り出したカードの数字がすべて異なる確率は，

$$ \frac{270}{455} = \frac{\boxed{54}}{\boxed{91}} \qquad \cdots ④ $$

である．

取り出したカードの数字は，1種類，2種類，3種類のどれかであるから，③，④より，取り出したカードの数字が2種類となる確率は，

$$ 1 - \left(\frac{1}{91} + \frac{54}{91} \right) = \frac{36}{91} $$

である．

☜ **余事象の確率**

$$ P(\overline{A}) = 1 - P(A). $$

数字1が書かれたカードがちょうど2枚となる取り出し方は②より36通りであるから，数字1が書かれたカードがちょうど2枚となる確率は $\frac{36}{455}$ である．

したがって，取り出したカードの数字が2種類であるという条件のもとで，数字1が書かれたカードがちょうど2枚である条件付き確率は，

$$ \frac{\frac{36}{455}}{\frac{36}{91}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{5}} $$

である．

☜ **条件付き確率**

$$ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. $$

取り出したカードの数字が2種類となるのは180通りあり，このうち数字1が書かれたカードがちょうど2枚となるのは36通りあるから，

$$ \frac{36}{180} = \frac{1}{5} $$

としてもよい．

第 4 問　整数の性質

p と q を負でない整数，r を 7 より小さい自然数とし，自然数 N について次の (i), (ii) が成り立っているとする．

(i)　N を 7 で割ったときの商と余りはそれぞれ p，r である．
(ii)　N を 15 で割ったときの商と余りはそれぞれ q，$2r$ である．

(i) より $N=$ $\boxed{\text{ア}}$ $p+r$，(ii) より $N=$ $\boxed{\text{イウ}}$ $q+2r$ である．

(1)　$r=6$ とする．このとき

$$\boxed{\text{ア}}\,p=\boxed{\text{イウ}}\,q+\boxed{\text{エ}}$$

であり，q が 1 桁(けた)の自然数である $(p,\ q)$ は

$$\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right),\ \left(\boxed{\text{キク}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$$

である．

(2)　$r=1$ とする．

$(p,\ q)$ のうち p が最も小さいものは $\left(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$ であり，0 以上の整数 k を用いて p は

$$p=\boxed{\text{スセ}}\,k+\boxed{\text{コサ}}$$

と表すことができる．

さらに，N を 105 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ソタ}}$ であるから，(i), (ii) を満たす 4 桁の N は全部で $\boxed{\text{チツ}}$ 個ある．

【解説】

(i), (ii) より，$r=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6$ として，

$$N=\boxed{7}\,p+r, \qquad \cdots ①$$

$$N=\boxed{15}\,q+2r \qquad \cdots ②$$

☜ 自然数 N を自然数 a で割ったときの商が b，余りが c であるとき，
$N=ab+c$.

である．

(1)　$r=6$ のとき，①，② より，

$$N=7p+6,$$

$$N=15q+12$$

であるから，

$$7p+6=15q+12$$

すなわち

$$7p=15q+\boxed{6} \qquad \cdots ③$$

である．

③ より，

$$7p=3(5q+2) \qquad \cdots ④$$

であり，7 と 3 は互いに素であるから，$5q+2$ は 7 の倍数である．

☜ ④ の左辺が 7 の倍数であるから，右辺も 7 の倍数である．ところが，7 と 3 は互いに素であるから，$5q+2$ は 7 の倍数となる．

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$5q+2$	7	12	17	22	27	32	37	42	47

表より，④ を満たす 1 桁の自然数である q は 1 と 8 であり，④ より，

$$q=1 \text{ のとき } p=3,$$
$$q=8 \text{ のとき } p=18$$

である．

よって，q が 1 桁の自然数である $(p,\ q)$ は，

$$(\boxed{3},\ \boxed{1}),\ (\boxed{18},\ \boxed{8})$$

である．

(2) $r=1$ のとき，①，② より，

$$N=7p+1, \qquad \cdots ①'$$
$$N=15q+2$$

であるから，

$$7p+1=15q+2$$

すなわち

$$7p-15q=1 \qquad \cdots ⑤$$

である．

⑤ より，

$$p=\frac{15q+1}{7}$$

であり，q が増加すると p も増加する．

$q=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，p は整数にならず $q=6$ のとき，

☜ $p=2q+\dfrac{q+1}{7}$ とするとよい．

$$p=\frac{91}{7}=13.$$

よって，⑤ を満たす $(p,\ q)$ のうち p が最も小さいものは，

$$(p,\ q)=(\boxed{13},\ \boxed{6})$$

である．

したがって，⑤ より，

$$7\cdot 13-15\cdot 6=1 \qquad \cdots ⑥$$

であり，⑤，⑥ の辺々を引いて，

$$7(p-13)-15(q-6)=0$$
$$7(p-13)=15(q-6).$$

7 と 15 は互いに素であるから，整数 k を用いて，

$$p-13=15k, \quad q-6=7k$$

☜ m，n を整数として，

$$7m=15n$$

が成り立つとき，7 と 15 は互いに素であるから，整数 k を用いて，

$$m=15k,\ n=7k$$

と表すことができる．

すなわち

$$p=\boxed{15}k+13, \quad q=7k+6$$

（p，q は負でないから k は 0 以上）

と表すことができる．

これと ①′ より，

$$\begin{aligned} N &= 7p+1 \\ &= 7(15k+13)+1 \\ &= 105k+92 \qquad \cdots ⑦ \end{aligned}$$

であるから，N を 105 で割ったときの余りは $\boxed{92}$ である．

また，N が 4 桁の自然数であるとき，

$$1000 \leqq N < 10000$$

$$1000 \leqq 105k+92 < 10000$$

$$\frac{908}{105} \leqq k < \frac{9908}{105}$$

☜ $8 < \frac{908}{105} < 9$，$94 < \frac{9908}{105} < 95$.

であり，

$$k = 9,\ 10,\ 11,\ \cdots,\ 94$$

であるから，(i)，(ii) を満たす 4 桁の N は全部で，

$$94-9+1 = \boxed{86}\ (\text{個})$$

☜ ⑦ より，

(N の個数) = (k の個数).

ある．