時習館高等部 センター講座

センター模擬試験

第２回　数学　ⅡB

解説と解答

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	4	1	
	イ	2	1	
	ウ，エオ	2，40	1	
	カ	3	2	
	キ，ク	4，1	2	
	ケコサ	256	3	
	$(\sqrt{シ}, ス)$	$(\sqrt{3}, 0)$	2	
	セ	2	2	
	ソ	6	3	
	タ	1	1	
	$\sqrt{チ}$	$\sqrt{3}$	1	
	$\dfrac{\sqrt{ツ}}{テ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	
	ト，ナ	3，2	2	
	ニ	3	3	
	ヌ，ネ，ノ，ハ	4，2，3，3	3	
	ヒ	6	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア	2	2	
	イ	1	2	
	ウ	0	2	
	エ	1	2	
	$\dfrac{オ}{カ}$	$\dfrac{1}{6}$	3	
	$\dfrac{キク}{ケ}$，コ，サ，シ	$\dfrac{-2}{3}$，3，3，1	4	
	$\dfrac{ス}{セ}$	$\dfrac{2}{3}$	3	
	$\dfrac{ソ}{タチ}$	$\dfrac{2}{27}$	2	
	ツ，テ	2，4	2	
	ト，ナ	4，2	4	
	$\dfrac{\sqrt{ニ}}{ヌ}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	4	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	アイ	20	2	
	ウエ	−2	2	
	オカ，キク	−2，22	2	
	ケ	2	1	
	コ，サ	b，a	1	
	シ，スセ，ソタ	−，23，22	3	
	チ	2	2	
	ツテ	20	2	
	ト，ナ，ニ，ヌネ	9，2，2，20	2	
	ノ，ハ，ヒフ，ヘホ	9，2，19，18	3	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{2}{5}$	2	
	ウ，エ	2，2	2	
	オ，$\frac{カ}{キ}$	1，$\frac{2}{5}$	2	
	$\frac{ク}{ケ}$	$\frac{4}{7}$	1	
	$\frac{コ}{サ}$	$\frac{5}{7}$	1	
	$\frac{シ}{ス}$	2	2	
	サ	$\frac{5}{2}$	2	
	ツ	0	2	
	$\frac{テ}{ト}$，$\frac{ナ}{ニ}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$	2	
	ヌ	1	2	
	$\frac{ネ\sqrt{ノ}}{ハ}$	$\frac{5\sqrt{7}}{4}$	2	
第4問　自己採点小計			(20)	

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

〔１〕 $f(x)=10\cdot 2^{x+2}-4^x$，$g(x)=\log_8(2x-8)^3$ とする．

(1) $2^{x+2}=\boxed{\text{ア}}\cdot 2^x$，$4^x=(2^x)^{\boxed{\text{イ}}}$ であるから，$t=2^x$ とすると

$$f(x)=-t^{\boxed{\text{ウ}}}+\boxed{\text{エオ}}\,t$$

と表される．

(2) $g(x)=\boxed{\text{カ}}\log_8(2x-8)$ と変形できる．さらに，底の変換公式を用いると

$$g(x)=\log_2\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)+\boxed{\text{ク}}$$

と変形できる．

(3) k を実数とする．$g(x)\leqq 1$ を満たすすべての実数 x が $f(x)\geqq k$ を満たすような最大の k の値は $\boxed{\text{ケコサ}}$ である．

〔２〕 O を原点とする座標平面において，２点 P，Q を

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \mathrm{Q}(\sqrt{3}\sin 2\theta,\ \sqrt{3}\cos 2\theta)$$

とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\mathrm{Q}\left(\sqrt{\boxed{\text{シ}}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$ である．

(2) $\sin 2\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}-2\theta\right)$，$\cos 2\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}-2\theta\right)$ であるから，３点 O，P，Q が同一直線上にあるのは

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$$

のときである．

　また，$\mathrm{OP}=\boxed{\text{タ}}$，$\mathrm{OQ}=\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ であるから，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，三角形 OPQ の面積を $S(\theta)$ とすると

$$S(\theta)=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}\sin\left(\boxed{\text{ト}}\,\theta-\frac{\pi}{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

と表される．よって，θ が $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，$S(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ニ}}}$ において最大となる．

(3) 線分 PQ の長さを ℓ とすると

$$\ell^2=\boxed{\text{ヌ}}-\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}\sin\left(\boxed{\text{ハ}}\,\theta\right)$$

と表される．θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，ℓ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ヒ}}}$ において最小となる．

【解説】

問題

〔1〕

$$f(x)=10\cdot 2^{x+2}-4^x,\quad g(x)=\log_8(2x-8)^3.$$

(1)
$$2^{x+2}=2^2\cdot 2^x=\boxed{4}\cdot 2^x,$$
$$4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^{\boxed{2}}$$

☜ $a>0$ のとき $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$, $(a^p)^q=a^{pq}$.

であるから，$t=2^x$ とすると

$$f(x)=10\cdot 4\cdot 2^x-(2^x)^2$$
$$=-t^{\boxed{2}}+\boxed{40}\,t$$

と表される．

(2) 真数は正であるから，$(2x-8)^3>0$ より

$$2x-8>0$$

すなわち

$$x>4 \qquad \cdots ①$$

である．

①のもとで，$g(x)$ を変形すると

$$g(x)=\boxed{3}\log_8(2x-8)$$

となる．

☜ $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，r が実数のとき $\log_a M^r=r\log_a M$.

さらに，底の変換公式を用いると

$$\log_8(2x-8)=\frac{\log_2(2x-8)}{\log_2 8}$$
$$=\frac{\log_2(2x-8)}{\log_2 2^3}$$
$$=\frac{\log_2(2x-8)}{3}$$

☜ **底の変換公式**
$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$c>0$，$c\neq 1$ のとき
$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

と変形できるから

$$g(x)=3\cdot\frac{\log_2(2x-8)}{3}$$
$$=\log_2(2x-8)$$
$$=\log_2 2(x-4)$$
$$=\log_2(x-4)+\log_2 2$$
$$=\log_2\left(x-\boxed{4}\right)+\boxed{1}$$

☜ $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$.

☜ $\log_2 2=1$.

となる．

(3) $g(x)\leqq 1$ より

$$\log_2(x-4)+1\leqq 1$$
$$\log_2(x-4)\leqq 0\ (=\log_2 1).$$

底の 2 は 1 より大きいので

$$x-4\leqq 1$$
$$x\leqq 5. \qquad \cdots ②$$

☜ $a>1$，$M>0$，$N>0$ のとき $\log_a M\leqq\log_a N \iff M\leqq N$.

①かつ②より，$g(x)\leqq 1$ を満たす実数 x の範囲は

$$4<x\leqq 5$$

である．よって，$t\,(=2^x)$ のとり得る値の範囲は

$$2^4<t\leqq 2^5$$

より

$$16<t\leqq 32 \qquad \cdots ③$$

である．

$a>1$ のとき
$p\leqq q \iff a^p\leqq a^q$.

$h(t)=-t^2+40t$ とおく．

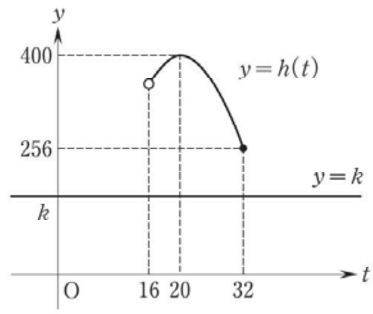
$f(x)=-t^2+40t$.

③ を満たすすべての実数 t が $h(t)\geqq k$ を満たすような最大の k の値を求めればよい．

$h(t)=-(t-20)^2+400$ より，③ において

$$h(t)\geqq h(32)=256$$

であるから，求める最大の k の値は $\boxed{256}$ である．



$k\leqq 256$ のとき，③ において
$h(t)\geqq 256\geqq k$
となり，$h(t)\geqq k$ を満たす．

［2］ 問題

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \mathrm{Q}(\sqrt{3}\sin 2\theta,\ \sqrt{3}\cos 2\theta).$$

点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上に，
点 Q は円 $x^2+y^2=3$ 上にある．

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，Q の座標は $\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{2},\ \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}\right)$ すなわち $\left(\sqrt{\boxed{3}},\ \boxed{0}\right)$ である．

$\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

(2) $\sin 2\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{\boxed{2}}-2\theta\right)$，$\cos 2\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$ である．

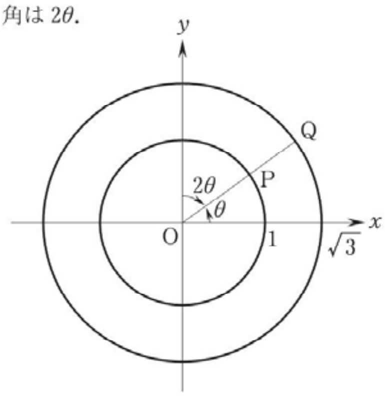
線分 OQ と y 軸の正の向きとのなす角は 2θ.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるのは

$$\theta=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{6}}$$

のときである．



また

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\boxed{1},$$

$$\mathrm{OQ}=\sqrt{3\sin^2 2\theta+3\cos^2 2\theta}=\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ のとき
$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\right)\dfrac{\pi}{2}-2\theta<\theta\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ なので

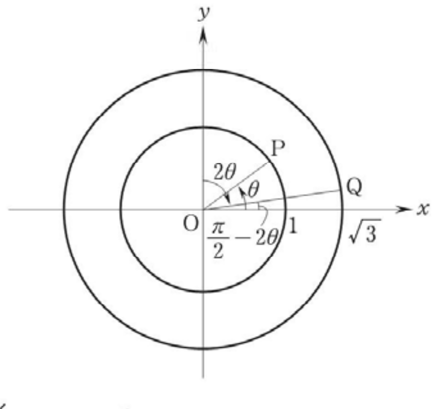
$$\angle\mathrm{POQ}=\theta-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=3\theta-\frac{\pi}{2}$$

である．したがって，三角形 OPQ の面積を $S(\theta)$ とすると

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}\sin\left(\boxed{3}\theta-\frac{\pi}{\boxed{2}}\right)$$

と表される．



$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin\angle\mathrm{POQ}$.

θ が $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，$0<3\theta-\dfrac{\pi}{2}<\pi$ で

あるから，$S(\theta)$ は $3\theta-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{3}}$ におい

て最大となる．

☜ $0<3\theta-\dfrac{\pi}{2}<\pi$ のとき $0<\sin\left(3\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\leqq 1$ であるから，$S(\theta)$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 線分 PQ の長さを ℓ とすると

$$\begin{aligned}\ell^2&=(\cos\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta)^2+(\sin\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta)^2\\&=\sin^2\theta+\cos^2\theta+3(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)\\&\qquad-2\sqrt{3}(\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta)\\&=1+3-2\sqrt{3}\sin 3\theta\\&=\boxed{4}-\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}\sin(\boxed{3}\theta)\end{aligned}$$

☜ $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)$
$=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$.

と表される．

θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，$0<3\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ である

から，ℓ^2 は $3\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ において最小となる．

$\ell>0$ であるから，ℓ も $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{6}}$ において最小となる．

☜ $0<3\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ のとき，
$-1<\sin 3\theta\leqq 1$ であるから
$4-2\sqrt{3}\leqq\ell^2<4+2\sqrt{3}$.
ℓ^2 が最小となるのは
$\sin 3\theta=1$
のときである．
ℓ^2 が最小のとき ℓ も最小となる．

【$\boxed{\text{ヌ}}$ ～ $\boxed{\text{ハ}}$ の別解】

$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}-3\theta$，$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\angle\mathrm{POQ}=3\theta-\dfrac{\pi}{2}$ であり

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 3\theta$$

☜ $\cos(-x)=\cos x$.

である．

したがって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\theta\neq\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\cos\angle\mathrm{POQ}=\sin 3\theta$$

である．このとき，三角形 OPQ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\ell^2&=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{POQ}\\&=4-2\sqrt{3}\sin 3\theta\qquad\cdots(*)\end{aligned}$$

☜ $\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2$
$-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\angle\mathrm{POQ}$.

となる．

また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\ell^2=(\mathrm{OQ}-\mathrm{OP})^2=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$$

であるから，(*) は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときも成り立つ．

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$\ell^2=4-2\sqrt{3}\sin 3\theta$$

である．

第2問　微分法・積分法

x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=x^2$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2+x$$

とする．$f(x)$，$g(x)$ のそれぞれの導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\,x$$

$$g'(x)=x+\boxed{\text{イ}}$$

である．

放物線 $y=f(x)$ を C，放物線 $y=g(x)$ を D とする．

(1) 原点における C の接線の傾きは $\boxed{\text{ウ}}$ であり，原点における D の接線の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ である．

a を $\boxed{\text{ウ}}<a<\boxed{\text{エ}}$ を満たす実数とし，直線 $y=ax$ を ℓ とする．

C と ℓ で囲まれた図形の面積を $S(a)$，D と ℓ で囲まれた図形の面積を $T(a)$ とすると

$$S(a)=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^3$$

$$T(a)=\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(a^3-\boxed{\text{コ}}\,a^2+\boxed{\text{サ}}\,a-\boxed{\text{シ}}\right)$$

である．

$h(a)=S(a)+T(a)$ とおく．a が $\boxed{\text{ウ}}<a<\boxed{\text{エ}}$ の範囲を変化するとき，$h(a)$ は

$a=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ において最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ をとる．

(2) t を正の実数とする．C 上の2点 $(t,\ f(t))$，$(2t,\ f(2t))$ における C の接線をそれぞれ m_1，m_2 とする．直線 m_1，m_2 の傾きはそれぞれ

$$\boxed{\text{ツ}}\,t,\quad \boxed{\text{テ}}\,t$$

である．

m_1 と m_2 のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\frac{1}{\tan\theta}=\boxed{\text{ト}}\,t+\frac{1}{\boxed{\text{ナ}}\,t}$$

が成り立つ．相加平均と相乗平均の関係を利用して，$\tan\theta$ は $t=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ で最大となることがわかり，このとき θ も最大となる．

【解説】 問題

$$f(x)=x^2,$$
$$g(x)=\frac{1}{2}x^2+x$$

より

$$f'(x)=\boxed{2}\,x,$$
$$g'(x)=x+\boxed{1}$$

である.

☜ 導関数

$(x^n)'=nx^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3)$.

$(c)'=0$　　　　(c は定数).

$$C:y=f(x),\quad D:y=g(x).$$

(1) 原点における C の接線の傾きは

$$f'(0)=2\cdot 0=\boxed{0}$$

であり，原点における D の接線の傾きは

$$g'(0)=0+1=\boxed{1}$$

である.

☜ 接線の傾き

曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の傾きは $f'(t)$ である.

a は $0<a<1$ を満たす実数である.

C と ℓ の交点の x 座標は，方程式

$$x^2=ax$$

の実数解である．この方程式を解くと

☜ $\begin{cases} C:y=x^2, \\ \ell:y=ax \quad (0<a<1). \end{cases}$

$$x(x-a)=0$$

より

$$x=0,\ a$$

☜ $0<a<1$ より，$0<a$.

である．また，D と ℓ の交点の x 座標は，方程式

$$\frac{1}{2}x^2+x=ax$$

☜ $\begin{cases} D:y=\frac{1}{2}x^2+x, \\ \ell:y=ax \quad (0<a<1). \end{cases}$

の実数解である．この方程式を解くと

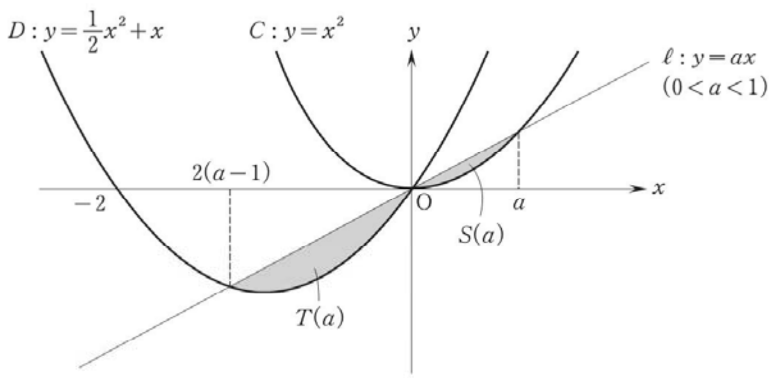
$$x^2-2(a-1)x=0$$
$$x\{x-2(a-1)\}=0$$

より

$$x=0,\ 2(a-1)$$

☜ $0<a<1$ より，$-2<2(a-1)<0$.

である.



よって，C と ℓ で囲まれた図形と D と ℓ で囲まれた図形は前図の影の部分であるから，面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_0^a (ax-x^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\frac{a}{2}\cdot a^2-\frac{1}{3}\cdot a^3$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}a^3$$

であり，面積 $T(a)$ は

$$T(a)=\int_{2(a-1)}^{0}\left\{ax-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\right\}dx$$
$$=\int_{2(a-1)}^{0}\left\{-\frac{1}{2}x^2+(a-1)x\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{a-1}{2}x^2\right]_{2(a-1)}^{0}$$
$$=-\left\{-\frac{1}{6}\cdot 8(a-1)^3+\frac{a-1}{2}\cdot 4(a-1)^2\right\}$$
$$=-\frac{2}{3}(a-1)^3$$
$$=\frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}}\left(a^3-\boxed{3}\,a^2+\boxed{3}\,a-\boxed{1}\right)$$

である．

$h(a)=S(a)+T(a)$ より

$$h(a)=\frac{1}{6}a^3-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+3a-1)$$
$$=-\frac{1}{2}a^3+2a^2-2a+\frac{2}{3}$$

であるから

$$h'(a)=-\frac{3}{2}a^2+4a-2$$
$$=-\frac{1}{2}(3a^2-8a+4)$$
$$=-\frac{1}{2}(3a-2)(a-2).$$

$0<a<1$ における $h(a)$ の増減は次のようになる．

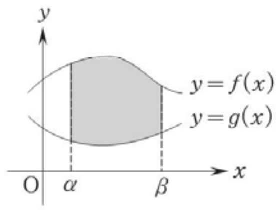
a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$		↘	極小	↗	

したがって，$h(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ において最小値

面積

区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば，
2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



定積分

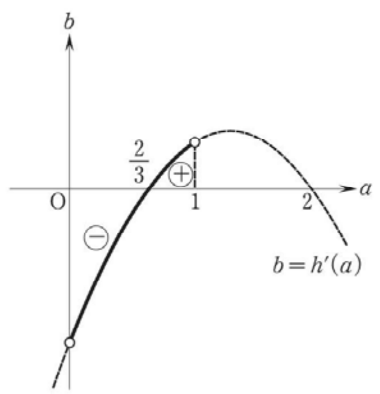
$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

（ただし $n=0$, 1, 2, C は積分定数）

であり，$f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta$$
$$=F(\beta)-F(\alpha).$$

$h'(a)$ の符号の変化は，$b=h'(a)$ のグラフをかくとわかりやすい．



$$h\left(\frac{2}{3}\right)=S\left(\frac{2}{3}\right)+T\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)^3$$

☜ $T(a)=-\frac{2}{3}(a-1)^3$ より

$T\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)^3.$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{27}}$$

をとる．

(2) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線 m_1 の傾きは

$$f'(t)=\boxed{\ 2\ }t$$

☜ $f'(x)=2x.$

であり，点 $(2t,\ f(2t))$ における C の接線 m_2 の傾きは

$$f'(2t)=2\cdot 2t=\boxed{\ 4\ }t$$

である．

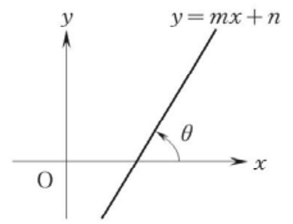
m_1 と x 軸の正の向きとのなす角を $\alpha\ \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, m_2 と x 軸の正の向きとのなす角を $\beta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\alpha=2t,\quad \tan\beta=4t. \qquad \cdots ①$$

☜ **直線の傾きと正接**

直線 $y=mx+n$ と x 軸の正の向きとのなす角を $\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta=m.$$

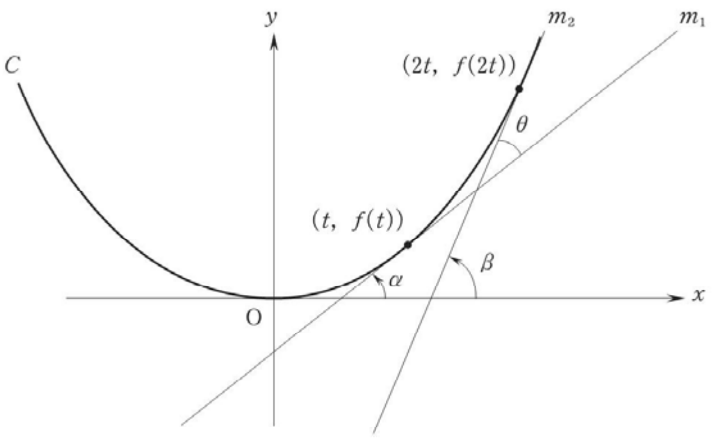


$0<2t<4t$ であるから

$$0<\tan\alpha<\tan\beta.$$

よって

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}.$$



よって，$0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$ となり，m_1 と m_2 のなす角 $\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ は

$$\theta=\beta-\alpha$$

である．

これと ① より

$$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{1+\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$$

☜ **加法定理**

$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}.$

$$=\frac{1+4t\cdot 2t}{4t-2t}$$

$$=\frac{8t^2+1}{2t}$$

$$=\boxed{\ 4\ }t+\frac{1}{\boxed{\ 2\ }t} \qquad \cdots ②$$

となる．

$4t>0$，$\dfrac{1}{2t}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$\frac{4t+\dfrac{1}{2t}}{2} \geqq \sqrt{4t\cdot\frac{1}{2t}} \qquad \cdots ③$$

☜ **相加平均と相乗平均の関係**

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}.$$

（等号成立は $a=b$ のとき）

すなわち

$$4t+\frac{1}{2t} \geqq 2\sqrt{2}$$

が成り立つ．

②より

$$\frac{1}{\tan\theta} \geqq 2\sqrt{2}$$

すなわち

$$\tan\theta \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}. \qquad \cdots ④$$

③において等号は $4t=\dfrac{1}{2t}$ かつ $t>0$，つまり，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき成り立ち，このとき④においても等号が成り立つ．

☜ $4t=\dfrac{1}{2t}$ かつ $t>0$ より

$$t^2=\frac{1}{8} \text{ かつ } t>0$$

であるから

$$t=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

したがって，$t=\dfrac{\sqrt{\boxed{\ 2\ }}}{\boxed{\ 4\ }}$ のとき $\tan\theta$ は最大となり，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，このとき θ も最大となる．

☜ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\tan\theta$ は単調増加である．

【$\boxed{\text{オ}}$～$\boxed{\text{シ}}$ の別解】

$$S(a)=\int_0^a (ax-x^2)\,dx$$

$$=-\int_0^a x(x-a)\,dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}(a-0)^3\right\}$$

☜ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3.$

$$=\frac{1}{6}a^3,$$

$$T(a)=\int_{2(a-1)}^0 \left\{ax-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\right\}dx$$

$$=\int_{2(a-1)}^0 \left\{-\frac{1}{2}x^2+(a-1)x\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{2(a-1)}^0 x\{x-2(a-1)\}\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-2(a-1)\}^3$$

☜ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3.$

$$= -\frac{2}{3}(a-1)^3$$

$$= -\frac{2}{3}(a^3-3a^2+3a-1).$$

第3問　数　列

$\{a_n\}$ を $a_5=12$，$a_7=8$ である等差数列とする．$a_1=$ $\boxed{\text{アイ}}$ であり，数列 $\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{ウエ}}$ である．したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{オカ}}\,n+\boxed{\text{キク}}$$

である．

(1) 数列 $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} b_1=0 \\ b_{n+1}=b_n+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たすとする．

数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の $\boxed{\text{ケ}}$ 数列である．$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪ 等差　　① 等比　　② 階差

n が 2 以上の自然数のとき

$$b_n=\boxed{\text{コ}}_1+\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{\text{サ}}_k$$

が成り立つ．よって

$$b_n=\boxed{\text{シ}}\,n^2+\boxed{\text{スセ}}\,n-\boxed{\text{ソタ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．

(2) 数列 $\{c_n\}$ は

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_{n+1}=2c_n+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たすとする．(*) は

$$c_{n+1}-\boxed{\text{チ}}(n+1)+\boxed{\text{ツテ}}=2\left(c_n-\boxed{\text{チ}}\,n+\boxed{\text{ツテ}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できるから

$$c_n=\boxed{\text{ト}}\cdot\boxed{\text{ナ}}^{\,n}+\boxed{\text{ニ}}\,n-\boxed{\text{ヌネ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．

さらに

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\boxed{\text{ノ}}\cdot\boxed{\text{ハ}}^{\,n+1}+n^2-\boxed{\text{ヒフ}}\,n-\boxed{\text{ヘホ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

【解説】

問題

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$$a_n=a+(n-1)d$$

である．$a_5=12$，$a_7=8$ より

$$\begin{cases} a+4d=12, \\ a+6d=8. \end{cases}$$

☜ **等差数列の一般項**

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n=a+(n-1)d.$$

これを解いて $a=20$，$d=-2$ であるから

$$a_1=\boxed{20}\text{，数列 }\{a_n\}\text{ の公差は }\boxed{-2}$$

であり，一般項は

$$a_n=20+(n-1)\cdot(-2)$$
$$=\boxed{-2}n+\boxed{22}$$

である．

(1) $b_{n+1}=b_n+a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より

$$b_{n+1}-b_n=a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列である．よって，

$\boxed{ケ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

n が 2 以上の自然数のとき

$$b_n=\boxed{b}_1+\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{a}_k$$

が成り立つので

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=\frac{n-1}{2}(a_1+a_{n-1})$$
$$=\frac{n-1}{2}\{20+(-2n+24)\}$$
$$=(n-1)(-n+22)$$
$$=-n^2+23n-22$$

☜ n が 2 以上の自然数のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k).$$

☜ $\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ は

初項 $a_1=20$，

末項 $a_{n-1}=-2n+24$，

項数 $n-1$

の等差数列の和である．

である．これは $n=1$ のときも成り立つので

$$b_n=\boxed{-}n^2+\boxed{23}n-\boxed{22}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．

(2) $c_{n+1}=2c_n+a_n$，$a_n=-2n+22$ より

$$c_{n+1}=2c_n-2n+22\qquad\cdots①$$

である．ここで，α，β を n によらない定数として，① が

$$c_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(c_n+\alpha n+\beta)\qquad\cdots②$$

と変形できたとする．② は

$$c_{n+1}=2c_n+\alpha n-\alpha+\beta$$

と書き直せるので

$$\begin{cases}\alpha=-2,\\ -\alpha+\beta=22\end{cases}$$

すなわち $\alpha=-2$，$\beta=20$ とすれば，① は ② のように変形できる．

したがって，① は

$$c_{n+1}-\boxed{2}(n+1)+\boxed{20}=2(c_n-2n+20)$$

と変形でき，$d_n=c_n-2n+20$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$d_{n+1}=2d_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．よって，数列 $\{d_n\}$ は初項

$$d_1 = c_1 - 2\cdot 1 + 20 = 18,$$

☜ $c_1 = 0$.

公比 2 の等比数列であるから

$$d_n = 18\cdot 2^{n-1} = 9\cdot 2^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$c_n = d_n + 2n - 20$ であるから

$$c_n = \boxed{9}\cdot\boxed{2}^{n} + \boxed{2}\,n - \boxed{20}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．

さらに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \sum_{k=1}^{n}(9\cdot 2^k + 2k - 20)\\ &= \frac{9\cdot 2(2^n-1)}{2-1} + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 20n\\ &= \boxed{9}\cdot\boxed{2}^{n+1} + n^2 - \boxed{19}\,n - \boxed{18}\end{aligned}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

☜ **和の公式**

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \quad (c \text{ は定数}).$$

第 4 問　平面ベクトル

三角形 OAB において，辺 OB を 2:3 に内分する点を C とする．このとき

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OB}$$

である．

(1)　辺 AB の中点を M とする．このとき

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\boxed{ウ}}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OB}$$

である．次に，直線 OM と直線 AC の交点を D とする．点 D は直線 OM 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OM}$ と表される．また，点 D は直線 AC 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AC}$ と表され

$$\overrightarrow{OD}=\left(\boxed{オ}-t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}t\overrightarrow{OB}$$

である．したがって

$$s=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},\quad t=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

である．

(2)　OA＝4，OB＝5，AB＝6 とする．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$$

であり，三角形 OAB の面積は $\dfrac{\boxed{セソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$ である．

直線 AB 上に点 P をとり，直線 OP と直線 AC が直交するときを考える．

このとき，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{ツ}$ であるから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{OB}$$

である．さらに，直線 OP と直線 AC の交点を E とすると，点 E は線分 OP を $\boxed{ヌ}$:1 に内分し，三角形 OAE の面積は $\dfrac{\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$ である．

【解説】 問題

辺 OB を 2:3 に内分する点が C であるから

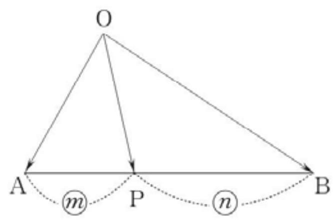
$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}\overrightarrow{OB} \qquad \cdots ①$$

である．

(1) 辺 AB の中点が M であるから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{\boxed{2}}\overrightarrow{OB} \qquad \cdots ②$$

☜ **内分点**



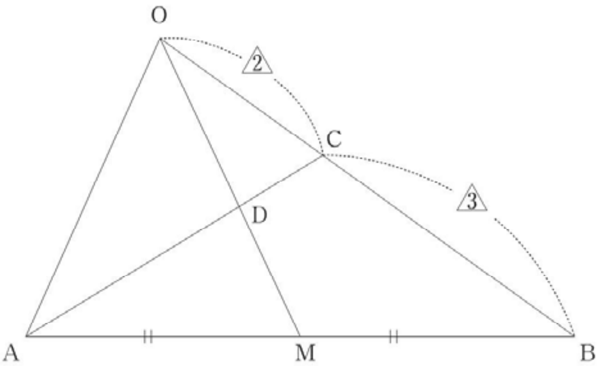
線分 AB を $m:n$ に内分する点が P であるとき

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

特に，点 P が線分 AB の中点のとき，すなわち $m=n=1$ のとき

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

である．



点 D は直線 OM 上にあるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OM}$$

と表される．これと ② より

$$\overrightarrow{OD}=\frac{s}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{s}{2}\overrightarrow{OB} \qquad \cdots ③$$

である．また，点 D は直線 AC 上にあるから，実数 t を用いて
$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AC}$ と表され

$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

より

$$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$$

と表される．これと ① より

$$\overrightarrow{OD}=\left(\boxed{1}-t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}t\overrightarrow{OB} \qquad \cdots ④$$

である．$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから，③，④ より

$$\begin{cases}\dfrac{s}{2}=1-t,\\[2mm] \dfrac{s}{2}=\dfrac{2}{5}t\end{cases}$$

☜ α，β，α'，β' が実数で，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b} \iff \begin{cases}\alpha=\alpha',\\ \beta=\beta'.\end{cases}$$

が成り立つ．これを解くと

$$s=\frac{\boxed{4}}{\boxed{7}},\quad t=\frac{\boxed{5}}{\boxed{7}}$$

である．

(2) $\left|\overrightarrow{OA}\right|=4$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=5$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$ である．

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=6^2$ より

$$\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=36$$

すなわち

$$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=36$$

である．これに $\left|\overrightarrow{OA}\right|=4$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=5$ を代入すると

$$5^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4^2=36$$

より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}} \qquad \cdots ⑤$$

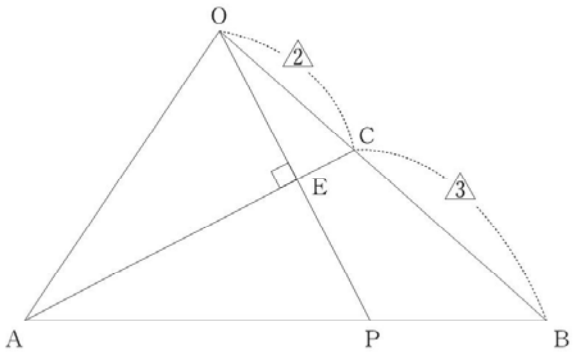
である．また，これを用いると，三角形 OAB の面積は

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2\cdot5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\boxed{15}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}$$

である．



点 P は直線 AB 上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ と表され

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

より

$$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB} \qquad \cdots ⑥$$

である．直線 OP と直線 AC が直交することより

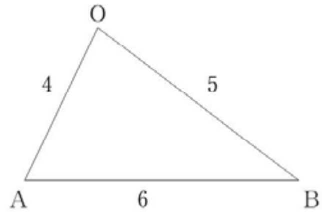
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{0}$$

であり

$$\{(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}\}\cdot\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$$

が成り立つ．さらに計算すると

$$-(1-k)\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{5}k\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}k\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0$$



三角形 OAB に，余弦定理を適用して

$$\cos\angle AOB=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}$$

$$=\frac{1}{8}.$$

よって

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB$$

$$=4\cdot5\cdot\cos\angle AOB$$

$$=\frac{5}{2}$$

と求めてもよい．

⑤ より

$$\cos\angle AOB=\frac{\frac{5}{2}}{4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

であるから

$$\sin\angle AOB=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

よって

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

と求めてもよい．

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=0.$$

① より

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$$

$$=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

となり，これに $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{2}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=5$ を用いると

$$-(1-k)\cdot 4^2+\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{5}k\right)\cdot\frac{5}{2}+\frac{2}{5}k\cdot 5^2=0$$

$$16(k-1)+\left(1-\frac{7}{2}k\right)+10k=0$$

より

$$k=\frac{2}{3}$$

となる．これと ⑥ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ⑦$$

である．

次に，直線 OP と直線 AC の交点 E について考える．点 E は直線 OP 上にあるから，実数 ℓ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表され，これと ⑦ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\ell}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2\ell}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ⑧$$

である．また，点 E は直線 AC 上にあるから，実数 m を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表され

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}m\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ⑨\end{aligned}$$

である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，⑧，⑨ より

$$\begin{cases}\dfrac{\ell}{3}=1-m,\\[2mm]\dfrac{2\ell}{3}=\dfrac{2}{5}m\end{cases}$$

が成り立つ．これを解くと

$$\ell=\frac{1}{2},\ m=\frac{5}{6}$$

である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから，点 E は線分 OP を $\boxed{1}$:1 に内分する点である．

⑧と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\ell}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5\ell}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

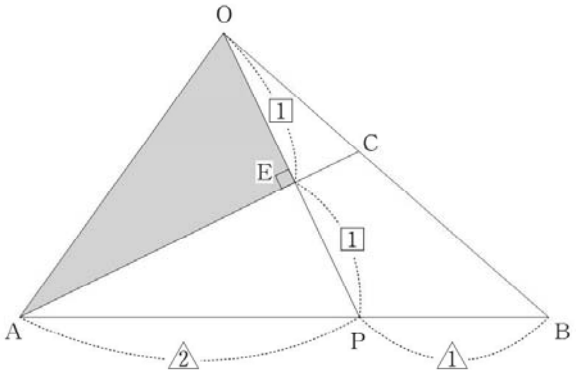
である．また，点 E は直線 AC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\frac{\ell}{3}+\frac{5\ell}{3}=1$$

$$\ell=\frac{1}{2}.$$

このように ℓ の値を求めることもできる．

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.



また，⑦より点Pは辺ABを2:1に内分する点であるから，
三角形OAEの面積は

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OAE} &= \frac{1}{2}\triangle \mathrm{OAP}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\triangle \mathrm{OAB}\right)\\ &= \frac{1}{3}\triangle \mathrm{OAB}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{4} \qquad ☜\quad \triangle \mathrm{OAB}=\frac{15\sqrt{7}}{4}.\\ &= \frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$

である．