時習館高等部 センター講座

センター模擬試験

第２回　数学　ⅠＡ

解説と解答

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	$-\frac{\sqrt{ア}}{イ}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	
	$\frac{ウ+\sqrt{エ}}{オ}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$	2	
	$\frac{カ+\sqrt{キ}}{ク}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$	2	
	$\frac{ケ-\sqrt{コ}}{サ}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	2	
	$\frac{シ+\sqrt{ス}}{セ}$	$\frac{7+\sqrt{3}}{2}$	2	
	ソタ	16	2	
	チ	1	2	
	ツ	2	3	
	テ	0	3	
	第1問　自己採点小計		(20)	
第2問	$a+ア$	$a+1$	2	
	$a^2-イa+ウエ$	$a^2-8a+13$	2	
	$オ\pm\sqrt{カ}$	$4\pm\sqrt{3}$	3	
	キ	5	2	
	クケ	−3	2	
	$a^2-コa+サシ$	$a^2-8a+13$	2	
	ス	2	2	
	$セa^2-ソタa+チツ$	$3a^2-26a+51$	3	
	$テa^2-トナa+ニヌ$	$3a^2-14a+27$	3	
	$\frac{ネ}{ノ}$	$\frac{7}{3}$	2	
	$\frac{ハヒ}{フ}$	$\frac{32}{3}$	2	
	第2問　自己採点小計		(25)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	$\frac{\sqrt{ア}}{イ}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	3	
	$\frac{\sqrt{ウ}}{エ}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	3	
	$\frac{オ\sqrt{カ}}{キ}$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	3	
	$ク\sqrt{ケ}$	$3\sqrt{3}$	3	
	コ	3	2	
	$\frac{\sqrt{サ}}{シ}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	
	$\frac{ス\sqrt{セ}}{ソ}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2	
	$\sqrt{タ}$	$\sqrt{3}$	3	
	$チ\sqrt{ツ}$	$2\sqrt{3}$	3	
	$\sqrt{テ}$	$\sqrt{2}$	3	
	トナ	22	3	
	第3問　自己採点小計		(30)	
第4問	アイウ	126	3	
	エオ	10	3	
	カ	3	3	
	キクケ	560	3	
	コサシ	210	3	
	$\frac{ス}{セソタ}$	$\frac{1}{180}$	3	
	$\frac{チ}{ツ}$	$\frac{2}{3}$	3	
	$\frac{テトナ}{ニヌ}$	$\frac{241}{36}$	4	
	第4問　自己採点小計		(25)	
	自己採点合計		(100)	

第１問　方程式・不等式，集合・論理

〔１〕

⑴　方程式 $|3x-2|=2x^2-3x+1$ の解のうち

$$x<\frac{2}{3} \text{ であるものは，} x=-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

$$\frac{2}{3}\leqq x \text{ であるものは，} x=\frac{\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

⑵　方程式

$$\bigl|3|x-2|-2\bigr|=2(x-2)^2-3|x-2|+1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x について

$$|x-2|=\frac{\boxed{\text{カ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

が成り立ち，方程式 ① の解は

$$x=\frac{\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \frac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

〔２〕　m を自然数の定数とする．1 から 100 までのすべての自然数の集合を全体集合 U とし，その部分集合 A，B，C を次のように定義する．

$A=\{x\,|\,x$ は偶数$\}$

$B=\{x\,|\,x$ は 3 の倍数$\}$

$C=\{m,\ m+2,\ m+4\}$

また，U の部分集合 G の補集合を $\overline{G}$ で表す．

⑴　$A\cap B$ の要素の個数は $\boxed{\text{ソタ}}$ であり，$B\cap C$ の要素の個数は $\boxed{\text{チ}}$ である．

⑵　次の $\boxed{\text{ツ}}$ と $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

(i)　$m=2$ とする．自然数 n が C に属することは，n が A に属するための $\boxed{\text{ツ}}$．

(ii)　m が奇数であることは，$(\overline{A\cup B})\cap C$ の要素の個数が 2 であるための $\boxed{\text{テ}}$．

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

【解説】

問題

〔1〕

(1) $$|3x-2|=2x^2-3x+1. \qquad \cdots(*)$$

(i) $3x-2<0$ すなわち $x<\dfrac{2}{3}$ のとき.

(*)より,

$$-(3x-2)=2x^2-3x+1$$
$$x^2=\frac{1}{2}$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

☜ $X<0$ のとき, $|X|=-X$.

$x<\dfrac{2}{3}$ であるから,

$$x=-\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

である.

☜ $\dfrac{4}{9}<\dfrac{1}{2}$ すなわち $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2<\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ より,
$$\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) $0\leqq 3x-2$ すなわち $\dfrac{2}{3}\leqq x$ のとき.

(*)より,

$$3x-2=2x^2-3x+1$$
$$2x^2-6x+3=0$$

☜ $X\geqq 0$ のとき, $|X|=X$.

であり, これを解くと,

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot 3}}{2}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}.$$

☜ 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は,
$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

$\dfrac{2}{3}\leqq x$ であるから,

$$x=\frac{\boxed{3}+\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

である.

☜ $$\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{27}}{6}<0, \\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{6}>0 \\ \text{より,} \\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

(2) 方程式 ① において, $|x-2|=t$ とおくと,

$$|3t-2|=2t^2-3t+1.$$

☜ $(x-2)^2=|x-2|^2=t^2$.

(1)より,

$$t=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

$t=|x-2|\geqq 0$ であるから,

$$t=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

であり, ① を満たす x について,

$$|x-2|=\frac{\boxed{3}+\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

である．

これより，

$$x-2=\pm\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$x=2\pm\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{7+\sqrt{3}}{2}$$

☜ $a>0$ のとき，X の方程式 $|X|=a$ の解は，

$$X=\pm a.$$

であるから，方程式 ① の解は，

$$x=\frac{\boxed{1}-\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}},\ \frac{\boxed{7}+\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

である．

〔2〕 **問題**

(1) $A\cap B$ の要素は，1 から 100 までの自然数の中の 6 の倍数であるから，

$$A\cap B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\}$$

より，$A\cap B$ の要素の個数は $\boxed{16}$ である．

$B\cap C$ の要素は C の要素の中の 3 の倍数である．

m が 3 の倍数のとき，$m+2$，$m+4$ はともに 3 の倍数ではない．

m が 3 で割ると 1 余る数のとき，$m+2$ は 3 の倍数であり，$m+4$ は 3 の倍数ではない．

m が 3 で割ると 2 余る数のとき，$m+2$ は 3 の倍数ではなく，$m+4$ は 3 の倍数である．

いずれの場合も，m，$m+2$，$m+4$ のうち 3 の倍数はただ 1 つであるから，$B\cap C$ の要素の個数は $\boxed{1}$ である．

(2)(i) $m=2$ のとき，自然数 n に関する条件 p，q を次のように定める．

p：n は C に属する

q：n は A に属する

$m=2$ のとき，$C=\{2,\ 4,\ 6\}$ であるから，

「$p\Longrightarrow q$」は真

☜ n は 2 または 4 または 6.

である．

また，

「$q\Longrightarrow p$」は偽　(反例は $n=8$)

である．

したがって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではないから，$\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

(ii) m に関する条件 r，s を次のように定める．

r：m は奇数である

s：$(\overline{A \cup B}) \cap C$ の要素の個数は 2 である

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ であるから，$\overline{A \cup B}$ の要素は，偶数でなくかつ 3 の倍数でない数，すなわち 6 で割ると余りが 1 または 5 になる数である．

☜ ド・モルガンの法則
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

☜ 偶数でない数，すなわち奇数を 6 で割ると余りは 1 か 3 か 5．
3 の倍数でない数を 6 で割ると余りは 1 か 2 か 4 か 5．

よって，$(\overline{A \cup B}) \cap C$ の要素は，m，$m+2$，$m+4$ のうち，6 で割ると余りが 1 または 5 になるものである．

(a) m が奇数のとき．

m を 6 で割ると余りは 1 または 3 または 5 である．これらに対して，$m+2$，$m+4$ を 6 で割ったときの余りを表にすると次のようになる．

（6 で割った余り）

m	1	3	5
$m+2$	3	5	1
$m+4$	5	1	3

いずれの場合も，m，$m+2$，$m+4$ の中には 6 で割ると余りが 1, 5 となる数が 1 つずつ含まれるから，$(\overline{A \cup B}) \cap C$ の要素の個数は 2 である．

よって，「$r \Longrightarrow s$」は真である．

(b) m が偶数のとき．

m，$m+2$，$m+4$ はいずれも偶数であるから，この中に 6 で割ると余りが 1 または 5 となる数は含まれない．よって，$(\overline{A \cup B}) \cap C$ は空集合であるから要素の個数は 0 である．

よって，「$\overline{r} \Longrightarrow \overline{s}$」は真であり，「$s \Longrightarrow r$」は真である．

☜ 命題とその対偶の真偽は一致する．

(a)，(b) より，

「$r \Longrightarrow s$」は真，「$s \Longrightarrow r$」は真

である．

したがって，r は s であるための必要十分条件であるから，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

第２問　２次関数

a を実数として x の２次関数

$$y=x^2-(2a+2)x+2a^2-6a+14 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

グラフ G の頂点の座標は

$$\left(a+\boxed{\text{ア}},\ a^2-\boxed{\text{イ}}a+\boxed{\text{ウエ}}\right)$$

である．

(1)　グラフ G が x 軸と接するのは

$$a=\boxed{\text{オ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

のときである．

$a=\boxed{\text{オ}}-\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のときのグラフ G を x 軸方向に $\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフを G_b とする．

グラフ G_b の軸は直線 $x=\boxed{\text{キ}}$ であり，G と G_b が x 軸上で交わるのは

$$b=\boxed{\text{クケ}}$$

のときである．

(2)　$-1\leqq a\leqq 5$ とし，関数①の $0\leqq x\leqq 6$ における最大値を M，最小値を m とする．

$$m=a^2-\boxed{\text{コ}}a+\boxed{\text{サシ}}$$

である．

$S=M+m$ とすると

$-1\leqq a<\boxed{\text{ス}}$ のとき　$S=\boxed{\text{セ}}a^2-\boxed{\text{ソタ}}a+\boxed{\text{チツ}}$

$\boxed{\text{ス}}\leqq a\leqq 5$ のとき　$S=\boxed{\text{テ}}a^2-\boxed{\text{トナ}}a+\boxed{\text{ニヌ}}$

である．

S は $a=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ をとる．

【解説】　問題

①を変形して，

$$\begin{aligned}y&=x^2-(2a+2)x+2a^2-6a+14\\&=\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2+2a^2-6a+14\\&=\{x-(a+1)\}^2+a^2-8a+13\end{aligned}$$

より，G の頂点の座標は，

$$\left(a+\boxed{1},\ a^2-\boxed{8}a+\boxed{13}\right)$$

である．

☜　放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，

$(q,\ r)$．

(1)　G が x 軸と接するのは G の頂点の y 座標が０のときであるから，

$$a^2-8a+13=0$$

より,

$$a = \boxed{\ 4\ } \pm \sqrt{\boxed{\ 3\ }}$$

☜ 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は,

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

のときである.

$a=4-\sqrt{3}$ のとき, G の頂点の座標は,

$$(5-\sqrt{3},\ 0)$$

である.

G を x 軸方向に $\sqrt{3}$, y 軸方向に b だけ平行移動したものが G_b であるから, G_b の頂点の座標は,

$$(5,\ b)$$

である. よって, G_b の方程式は,

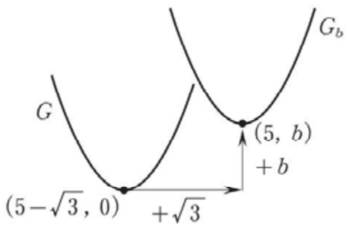
$$y=(x-5)^2+b$$

☜ 放物線の平行移動は頂点の移動を考えればよい.

であり, G_b の軸は直線

$$x=\boxed{\ 5\ }$$

である.



G と x 軸の共有点は $(5-\sqrt{3},\ 0)$ であるから, G と G_b が x 軸上で交わるのは, G_b が点 $(5-\sqrt{3},\ 0)$ を通るとき, すなわち

$$0=\{(5-\sqrt{3})-5\}^2+b$$

より,

$$b=\boxed{-3}$$

のときである.

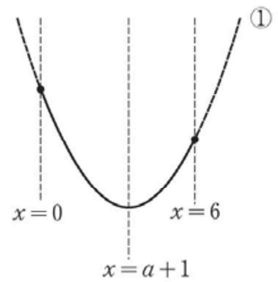
(2) $-1 \leqq a \leqq 5$ のとき,

$$0 \leqq a+1 \leqq 6$$

であるから, $x=a+1$ のとき ① は最小値

$$m=a^2-\boxed{\ 8\ }a+\boxed{\ 13\ }$$

☜



をとる.

次に, 関数 ① の最大値 M を考える.

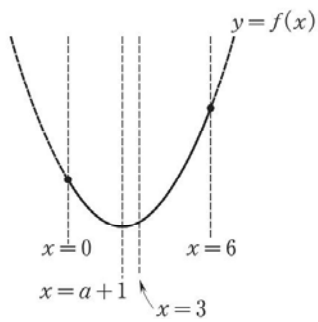
$$f(x)=x^2-(2a+2)x+2a^2-6a+14$$

とおく.

$0 \leqq a+1 < 3$ すなわち $-1 \leqq a < 2$ のとき,

$$\begin{aligned} M &= f(6) \\ &= 2a^2-18a+38 \end{aligned}$$

☜

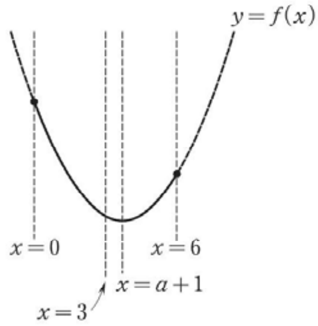


である.

$3 \leqq a+1 \leqq 6$ すなわち $2 \leqq a \leqq 5$ のとき，

$$M = f(0)$$
$$= 2a^2 - 6a + 14$$

である．



よって，$-1 \leqq a < \boxed{2}$ のとき，

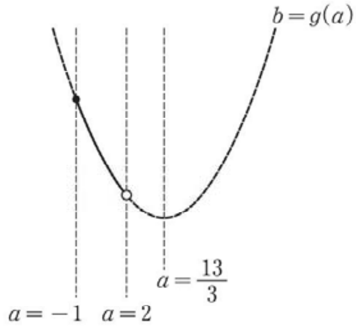
$$S = (2a^2 - 18a + 38) + (a^2 - 8a + 13)$$
$$= \boxed{3}\,a^2 - \boxed{26}\,a + \boxed{51}.$$

$2 \leqq a \leqq 5$ のとき，

$$S = (2a^2 - 6a + 14) + (a^2 - 8a + 13)$$
$$= \boxed{3}\,a^2 - \boxed{14}\,a + \boxed{27}.$$

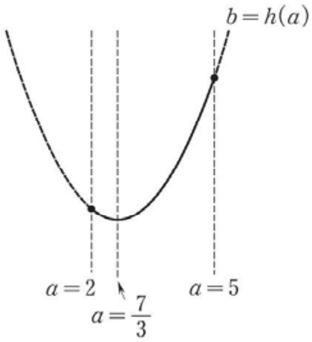
$g(a) = 3a^2 - 26a + 51$ とおくと，$-1 \leqq a < 2$ のとき，

$$S = g(a)$$
$$= 3\left(a - \frac{13}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}$$
$$> g(2)$$
$$= 11$$



であり，$h(a) = 3a^2 - 14a + 27$ とおくと，$2 \leqq a \leqq 5$ のとき，

$$S = h(a)$$
$$= 3\left(a - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{32}{3}$$
$$\geqq h\left(\frac{7}{3}\right)$$
$$= \frac{32}{3} \quad (< 11)$$



であるから，S は，

$$a = \frac{\boxed{7}}{\boxed{3}} \text{ のとき，最小値 } \frac{\boxed{32}}{\boxed{3}}$$

をとる．

第 3 問　図形と計量・平面図形

$\triangle$ABC において，$AB=3\sqrt{2}$，$BC=5$，$CA=\sqrt{3}$ とする．また，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とし，円 O の周上に点 D を線分 AD が円 O の直径となるようにとる．

(1)　このとき

$$\cos\angle BCA=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle BCA=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

また

$$AD=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}},\quad BD=\boxed{\text{コ}}$$

であり

$$\sin\angle DAB=\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \sin\angle CAD=\frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．

(2)　直線 AD と直線 BC の交点を E とすると

$$AE=\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である．

さらに，直線 AD 上に点 F を $\angle BFA=90^\circ$ となるようにとり，直線 BD 上に点 G を $\angle BGF=90^\circ$ となるようにとる．

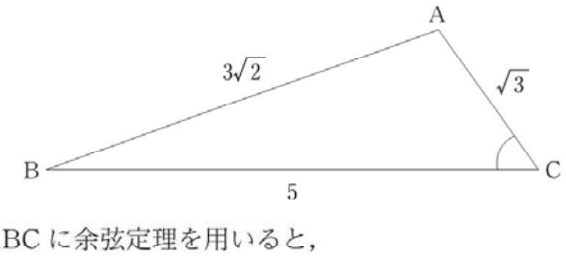
$$AF=\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}},\quad FG=\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

であり，点 F を中心とし点 A を通る円と直線 BD の 2 交点を P，Q とすると

$$PD^2+QD^2=\boxed{\text{トナ}}$$

である．

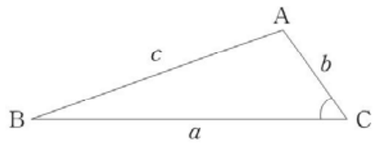
【解説】　問題



(1)　$\triangle$ABC に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\cos\angle BCA&=\frac{BC^2+CA^2-AB^2}{2BC\cdot CA}\\&=\frac{5^2+(\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot5\cdot\sqrt{3}}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

余弦定理



$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

であり，

$$\sin\angle\mathrm{BCA}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BCA}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$$

である．

☜ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，

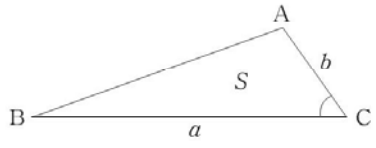
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

また，

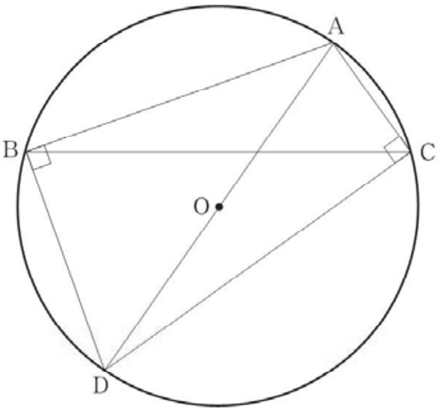
$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\sin\angle\mathrm{BCA}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$



線分 AD は円 O の直径であるから，円 O の半径を R とすると，

$$\mathrm{AD}=2R$$

である．

$\triangle$ABC に正弦定理を用いると，

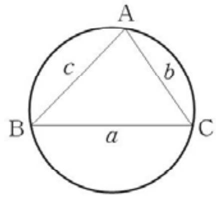
$$2R=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{BCA}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$
$$=3\sqrt{3}$$

であるから，

$$\mathrm{AD}=\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

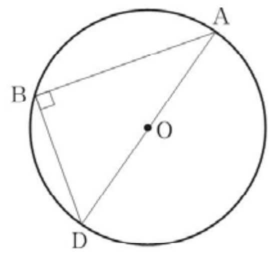
☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

線分 AD は円 O の直径であるから，△ABD は ∠ABD＝90° の直角三角形である．

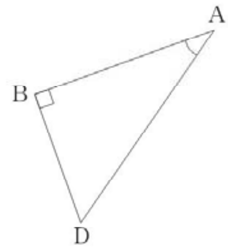


△ABD に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} &= \sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AB}^2}\\ &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}\\ &= \boxed{3}\end{aligned}$$

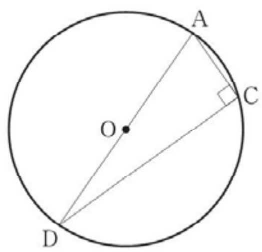
であるから，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{DAB} &= \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}\\ &= \frac{3}{3\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$



である．

線分 AD は円 O の直径であるから，△ACD は ∠ACD＝90° の直角三角形である．

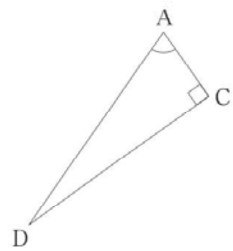


△ACD に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{CD} &= \sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{CA}^2}\\ &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}\\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

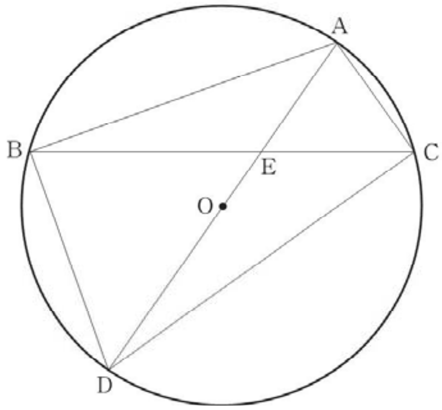
であるから，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{CAD} &= \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}\\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}\\ &= \frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$



である．

(2)



(△ABC の面積)＝(△ABE の面積)＋(△AEC の面積)

であるから，

$$
\begin{aligned}
\frac{5\sqrt{2}}{2} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{EAB}+\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{CAE}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{DAB}+\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{CAD}\\
&= \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\mathrm{AE}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{AE}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\
&= \frac{5\sqrt{6}}{6}\mathrm{AE}
\end{aligned}
$$

であり，

$$\mathrm{AE}=\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

☜ AE：ED

$=$（△ABC の面積）：（△DBC の面積）

$=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}:\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$

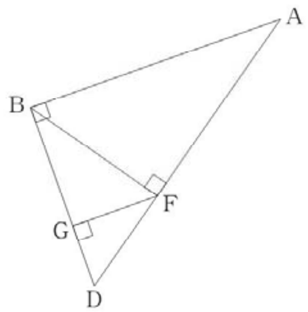
$=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}:3\cdot 2\sqrt{6}$

$=1:2$

より，

$$\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\mathrm{AD}$$

と考えてもよい．



$$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{AFB}\backsim\triangle\mathrm{FGD}$$

より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{FD}}.$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AF} &= \frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AD}}\\
&= \frac{(3\sqrt{2})^2}{3\sqrt{3}}\\
&= \boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FG} &= \frac{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{FD}}{\mathrm{AB}}\\
&= \frac{\mathrm{AF}(\mathrm{AD}-\mathrm{AF})}{\mathrm{AB}}\\
&= \frac{2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{3})}{3\sqrt{2}}\\
&= \sqrt{\boxed{2}}
\end{aligned}
$$

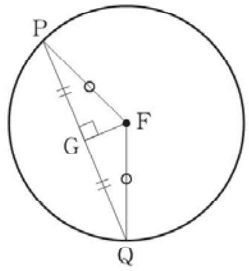
である．

$$PD^2+QD^2=(PD+QD)^2-2PD\cdot QD. \qquad \cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned} PD+QD&=PQ \\ &=2PG \\ &=2\sqrt{PF^2-FG^2} \\ &=2\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} \\ &=2\sqrt{10} \end{aligned}$$

である．

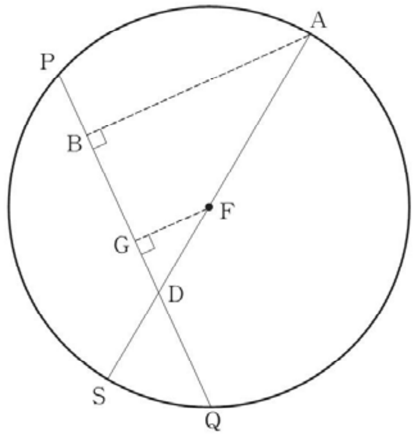


PG＝QG より，PQ＝2PG.

直角三角形 FGP に三平方の定理を用いた．

$PF=AF=2\sqrt{3}$.

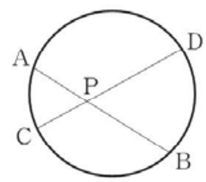
また，点 F を中心とし点 A を通る円と直線 AD の交点のうち A でない方を S とする．



方べきの定理より，

$$\begin{aligned} PD\cdot QD&=AD\cdot DS \\ &=3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \\ &=9 \end{aligned}$$

方べきの定理



$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

$$\begin{aligned} DS&=AS-AD \\ &=2AF-AD \\ &=2\cdot2\sqrt{3}-3\sqrt{3} \\ &=\sqrt{3}. \end{aligned}$$

であるから，① より，

$$\begin{aligned} PD^2+QD^2&=(PD+QD)^2-2PD\cdot QD \\ &=(2\sqrt{10})^2-2\cdot9 \\ &=\boxed{22} \end{aligned}$$

である．

(注)

PD，QD を直接求めて計算してもよい．

PD＞QD とすると，

$$PD=PG+DG=\frac{1}{2}PQ+DG,$$

$$QD=QG-DG=\frac{1}{2}PQ-DG.$$

三平方の定理より，

$$\begin{aligned} DG&=\sqrt{FD^2-FG^2} \\ &=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} \\ &=1. \end{aligned}$$

これと $\mathrm{PQ}=2\sqrt{10}$ より，

$$\mathrm{PD}=\sqrt{10}+1,\quad \mathrm{QD}=\sqrt{10}-1$$

であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{PD}^2+\mathrm{QD}^2&=(\sqrt{10}+1)^2+(\sqrt{10}-1)^2\\&=22.\end{aligned}$$

第４問　場合の数・確率

１から９までの番号がつけられた９枚のカードがある．まず，この９枚のカードから４枚を選んで箱Ａに入れ，残り５枚のカードから２枚のカードを選んで箱Ｂに入れる．この操作の後，箱Ａに入っているカードに書かれている番号のうち最大のものを a とし，箱Ｂに入っているカードに書かれている番号のうち最大のものを b とする．

⑴　箱Ａに入れるカードの選び方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りであり，そのそれぞれに対して箱Ｂに入れるカードの選び方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りずつあるから，カードの入れ方は全部で $\boxed{\text{アイウ}}\times\boxed{\text{エオ}}$ 通りある．

このカードの入れ方 $\boxed{\text{アイウ}}\times\boxed{\text{エオ}}$ 通りのうち

$a=4$ かつ $b=8$ である入れ方は $\boxed{\text{カ}}$ 通り

$a=9$ である入れ方は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通り

$a=8$ かつ $b<a$ である入れ方は $\boxed{\text{コサシ}}$ 通り

である．

⑵　a，b の値によって次のように得点を定める．

$2a\leqq b$ のときは，　15 点

$a<b<2a$ のときは，　10 点

$b<a$ のときは，　5 点

得点が 15 点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ であり，得点が５点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{テトナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ 点である．

【解説】

問題

⑴　１から９までの９枚のカードから箱Ａに入れる４枚のカードを選ぶ方法は，

$$ {}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \boxed{126}\ (\text{通り}) $$

であり，そのそれぞれに対して残りの５枚から箱Ｂに入れる２枚のカードを選ぶ方法は，

$$ {}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1} = \boxed{10}\ (\text{通り}) $$

である．

よって，箱Ａと箱Ｂのカードの入れ方は全部で，

$$ 126\cdot10\ (\text{通り}) $$

である．

$a=4$ かつ $b=8$ のとき，箱Aには1，2，3，4のカードを選んで入れ，箱Bには8のカードと5，6，7のカードから1枚を選んで入れればよいので，

$${}_4C_4\cdot{}_3C_1=\boxed{3}\ （通り）$$

である．

$a=9$ のとき，箱Aには9のカードと1から8までのカードから3枚を選んで入れ，箱Bには箱Aに入れたカード以外の5枚から2枚を選んで入れればよいので，

$${}_8C_3\cdot{}_5C_2=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{5\cdot4}{2\cdot1}$$
$$=\boxed{560}\ （通り）$$

である．

$a=8$ かつ $b<a$ のとき，箱Aには8のカードと1から7までのカードから3枚を選んで入れ，箱Bには1から7までのカードのうち箱Aに入れたカード以外の4枚から2枚を選んで入れればよいので，

$${}_7C_3\cdot{}_4C_2=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}$$
$$=\boxed{210}\ （通り）$$

である．

(2) 箱Aには4枚のカードを選んで入れるから $4\leqq a\leqq 9$ である．

☜ 箱Aには4枚のカードを入れるので，最大の番号である a は1，2，3になることはない．

得点が15点になる，すなわち $2a\leqq b$ のとき，

$$(a,\ b)=(4,\ 8),\ (4,\ 9)$$

である．

☜ $a=4$ のとき，$2a\leqq b$ より $8\leqq b$ である．
また $5\leqq a$ とすると，$2a\leqq b$ より $10\leqq b$ となるから，b は存在しない．

$(a,\ b)=(4,\ 8)$ のとき，(1)よりカードの入れ方は3通りである．

$(a,\ b)=(4,\ 9)$ のとき，箱Aには1，2，3，4のカードを選んで入れ，箱Bには9のカードと5，6，7，8のカードから1枚を選んで入れればよいので，カードの入れ方は4通りである．

よって，得点が15点になる確率は，

$$\frac{3+4}{126\cdot10}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{180}}$$

である．

得点が5点になる，すなわち $b<a$ のとき，

$$a=6,\ 7,\ 8,\ 9$$

である．

☜ $b<a$ のとき，箱A，箱Bに入れる合計6枚のカードの数のうち最大のものが a であるから，$a\geqq6$ である．

(i) $a=9$ のとき，(1)よりカードの入れ方は560通りである．

(ii) $a=8$ のとき，(1)よりカードの入れ方は210通りである．

(iii) $a=7$ のとき，箱Aには7のカードと1から6までのカードから3枚を選んで入れ，箱Bには1から6までのカードの

うち箱Aに入れたカード以外の3枚から2枚を選んで入れればよいので，

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_2 = 60 \text{（通り）}$$

である．

(iv) $a=6$ のとき，箱Aには6のカードと1から5までのカードから3枚を選んで入れ，箱Bには1から5までのカードのうち箱Aに入れたカード以外の2枚を入れればよいので，

$${}_5C_3 \cdot {}_2C_2 = 10 \text{（通り）}$$

である．

(i)，(ii)，(iii)，(iv)より，得点が5点になる確率は，

$$\frac{560+210+60+10}{126\cdot 10} = \frac{840}{126\cdot 10}$$
$$= \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

である．

得点が10点になる確率は，得点が15点と5点になるときの確率より，

$$1-\left(\frac{1}{180}+\frac{2}{3}\right) = \frac{59}{180}$$

である．

☜ **余事象の確率**

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

したがって，得点と確率は下の表のようになる．

得点	5	10	15	計
確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{59}{180}$	$\frac{1}{180}$	1

よって，得点の期待値は，

$$5\times\frac{2}{3}+10\times\frac{59}{180}+15\times\frac{1}{180} = \frac{1205}{180}$$
$$= \frac{\boxed{241}}{\boxed{36}} \text{（点）}$$

である．

☜ **期待値**

試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

であり，それぞれの起こる確率が，

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$
$$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，期待値 E は，

$$E = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n.$$

(注)

得点が5点になる，すなわち $b<a$ のときの確率は，次のように考えてもよい．

まず，1から9までのカードから6枚を選ぶ選び方は，

$${}_9C_6 = 84 \text{（通り）}$$

である．

このそれぞれに対して，箱Aには6枚のうちの最大の番号のカードを1枚と残りの5枚のカードから3枚を選び，箱Bには残りの2枚を入れることを考えればよいので，

$${}_5C_3 \cdot {}_2C_2 = 10 \text{（通り）}$$

である．

よって，得点が 5 点になる確率は，

$$\frac{84\cdot 10}{126\cdot 10}=\frac{2}{3}$$

である．