時習館高等部 センター講座

センター模擬試験

第１回　数学　ⅡＢ

解説と解答

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\frac{\sqrt{ア}}{イ}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	2	
	オ	2	2	
	カ，キ	2，2	2	
	$\frac{\pi}{ク}$，$\frac{ケ}{コ}\pi$	$\frac{\pi}{3}$，$\frac{7}{6}\pi$	2	
	$\frac{サ}{シ}\pi$，$\frac{スセ}{ソ}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$	2	
	タ	0	1	
	チ	4	2	
	ツ	b	1	
	テ	1	1	
	ト	1	2	
	ナ	2	1	
	$\frac{ニ}{ヌ}$	$\frac{1}{2}$	1	
	ネ	0	2	
	ノハ	−1	4	
	ヒ	4	3	
		第1問　自己採点小計	(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イウ，エ	3，$2a$，b	2	
	オ，カ	1，3	2	
	キク	−3	2	
	ケコ	−9	2	
	サ	2	2	
	シス	−9	2	
	セ	2	2	
	ソタ，チ	−1，7	3	
	ツテ	−9	2	
	トナ	16	2	
	$\frac{ニヌ}{ネ}$	$\frac{21}{2}$	3	
	ノ，ハ，ヒフ	6，9，14	3	
	$\sqrt{ヘ}-ホ$	$\sqrt{7}-2$	3	
		第2問　自己採点小計	(30)	
第3問	ア	3	1	
	イ	1	1	
	ウ	3	1	
	$\frac{エ}{オ}$，$\frac{カ}{キ}$	$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$	3	
	ク	1	2	
	ケコ	10	2	
	サ	1	1	
	シ	2	1	
	ス	2	1	
	セ	3	1	
	ソ，タ	1，1	3	
	チツテ	615	3	
		第3問　自己採点小計	(20)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第4問	$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\dfrac{3}{4}$	1	
	$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$, $\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$	1	
	$\dfrac{\text{キ}-s}{\text{ク}}$, $\dfrac{s}{\text{ケ}}$	$\dfrac{3-s}{4}$, $\dfrac{s}{2}$	3	
	コ	2	2	
	サ	0	2	
	$\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}$	$\dfrac{1}{8}$	3	
	セ	2	2	
	ソ	5	3	
	$\dfrac{\text{タ}\sqrt{\text{チツ}}}{\text{テ}}$	$\dfrac{3\sqrt{19}}{2}$	3	
第4問 自己採点小計			(20)	

第１問　三角関数，指数関数・対数関数

〔１〕 $0 \leqq x < 2\pi$ とする．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ であり，方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ を満たす x の値は

$$\frac{\pi}{3},\qquad \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$$

である．

(2) $\sin 2x = \boxed{オ}\sin x\cos x$ であるから，不等式

$$2\sin 2x < 2\sin x - 2\cos x + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を変形すると

$$\left(\boxed{カ}\sin x + 1\right)\left(\boxed{キ}\cos x - 1\right) < 0$$

となる．よって，(*) を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{ク}} < x < \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi,\qquad \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi < x < \frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}\pi$$

である．

(3) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ とする．x の連立不等式

$$\begin{cases} \sin x < \sin\alpha \\ \cos x < \cos\alpha \end{cases}$$

を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{タ} < x < \boxed{チ}$$

である．$\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ．

⓪ α　　① 2α　　② $\pi - \alpha$

③ $\pi - 2\alpha$　　④ $2\pi - \alpha$　　⑤ $2\pi - 2\alpha$

〔２〕 a，b はともに１以外の正の実数とし，$s = \log_a b$，$t = \log_b a$ とする．

底の変換公式より，$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a \boxed{ツ}}$ であるから

$$st = \boxed{テ}$$

である．

(1) $b = a$ のとき，$s = t = \boxed{ト}$ である．

また，$b = a^2$ のとき，$s = \boxed{ナ}$，$t = \dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である．

(2) $0 < a < 1$，$1 < b$ とする．このとき，s のとり得る値の範囲は $s < \boxed{ネ}$ である．

さらに，すべての実数 x に対して $sx^2 - tx - \dfrac{1}{4} < 0$ が成り立つような s のとり得る値の範

囲は $s<\boxed{\text{ノハ}}$ であり，これを a，b を用いて表すと $\boxed{\text{ヒ}}$ である．$\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ $1<b<2a$　　① $\dfrac{1}{a^2}<b$　　② $1<b<\dfrac{1}{a^2}$

③ $1<b<4a$　　④ $\dfrac{1}{a}<b$　　⑤ $1<b<\dfrac{1}{a}$

【解説】

問題

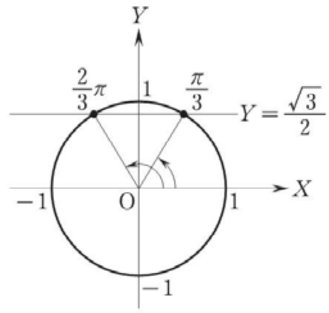
〔1〕

$0 \leqq x < 2\pi$ において考える．

⑴ $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$ であり，方程式 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす x の値は

$$\frac{\pi}{3},\quad \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi$$

である．



⑵ $\sin 2x=\boxed{2}\sin x\cos x$ であるから，不等式

$$2\sin 2x<2\sin x-2\cos x+1 \qquad \cdots(*)$$

は

2倍角の公式
$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$

$$4\sin x\cos x<2\sin x-2\cos x+1$$
$$2\sin x(2\cos x-1)+(2\cos x-1)<0$$
$$\left(\boxed{2}\sin x+1\right)\left(\boxed{2}\cos x-1\right)<0$$

と変形できるので

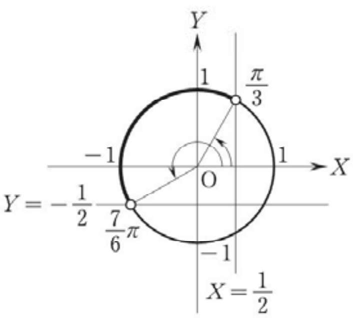
$$\begin{cases}2\sin x+1>0\\2\cos x-1<0\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}2\sin x+1<0\\2\cos x-1>0\end{cases}$$

すなわち

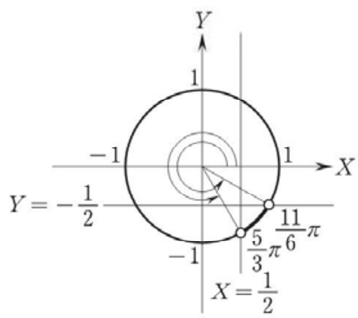
$$\begin{cases}\sin x>-\dfrac{1}{2}\\\cos x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}\sin x<-\dfrac{1}{2}\\\cos x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

となる．

$\sin x>-\dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x<\dfrac{1}{2}$ のとき



$\sin x<-\dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x>\dfrac{1}{2}$ のとき



よって，(*) を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{3}}<x<\frac{\boxed{7}}{\boxed{6}}\pi,\quad \frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\pi<x<\frac{\boxed{11}}{\boxed{6}}\pi$$

である．

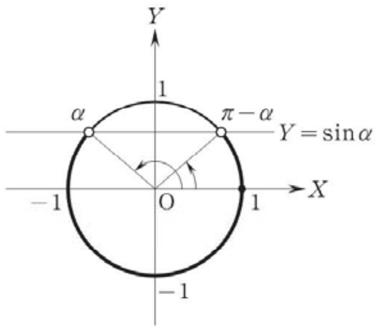
(3) α が $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ を満たすとき，x の不等式

$$\sin x<\sin\alpha$$

を満たす x のとり得る値の範囲は

$$0\leqq x<\pi-\alpha \quad \text{または} \quad \alpha<x<2\pi \qquad \cdots ①$$

である．



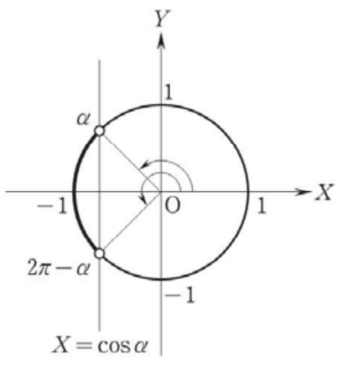
また，x の不等式

$$\cos x<\cos\alpha$$

を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\alpha<x<2\pi-\alpha \qquad \cdots ②$$

である．



よって，連立不等式

$$\begin{cases}\sin x<\sin\alpha \\ \cos x<\cos\alpha\end{cases}$$

を満たす x のとり得る値の範囲は ① かつ ② より

$$\alpha<x<2\pi-\alpha$$

である．すなわち，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ であり，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

［2］ **問題**

a，b はともに 1 以外の正の実数であり，$s=\log_a b$，$t=\log_b a$ である．

底の変換公式より

$$\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a \boxed{b}}$$

であるから

$$st=\log_a b\cdot\frac{1}{\log_a b}=\boxed{1} \qquad \cdots①$$

である．

底の変換公式

a, b, c が正の実数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

☜ $\log_a a=1$.

⑴ $b=a$ のとき，$s=t=\log_a a=\boxed{1}$ である．

また，$b=a^2$ のとき

$$s=\log_a a^2=2\log_a a=\boxed{2}$$

であり，これと ① より

$$t=\frac{1}{s}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ $c>0$，$c \neq 1$，$R>0$ のとき
$\log_c R^r=r\log_c R$.

⑵ $0<a<1$ であるから，

$$1<b$$

より

$$\log_a 1>\log_a b$$
$$0>\log_a b$$

である．$\log_a b=s$ であるから，s のとり得る値の範囲は

$s<\boxed{0}$ である．

☜ $0<a<1$，$M>0$，$N>0$ のとき
$M<N \iff \log_a M>\log_a N$.

さらに，すべての実数 x に対して

$$sx^2-tx-\frac{1}{4}<0$$

が成り立つ条件は，$s<0$ より

x の 2 次方程式 $sx^2-tx-\dfrac{1}{4}=0$ $\qquad \cdots②$

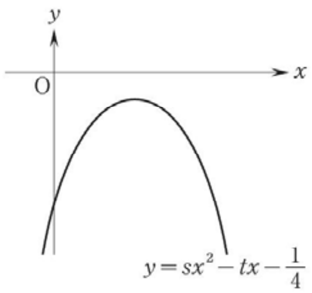
が実数解をもたないこと

すなわち

② の判別式を D とすると $D<0$ が成り立つこと

である．ここで，$t=\dfrac{1}{s}$ より

$$D=(-t)^2-4\cdot s\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$=t^2+s$$



☜ $y=s\left(x-\dfrac{t}{2s}\right)^2-\dfrac{t^2}{4s}-\dfrac{1}{4}$ $(s<0)$ より，$-\dfrac{t^2}{4s}-\dfrac{1}{4}<0$ が条件と考えてもよい．この不等式の両辺に $-4s\,(>0)$ をかけると，$t^2+s<0$ となる．

$$=\left(\frac{1}{s}\right)^2+s$$

$$=\frac{s^3+1}{s^2}$$

$$=\frac{(s+1)(s^2-s+1)}{s^2}$$

$$=\frac{s+1}{s^2}\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\} \qquad \cdots ③$$

であるから，$D<0$ を満たす s の範囲は

$$s<-1$$

☜　③において

$$\begin{cases} s^2>0 \\ \left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \end{cases}$$

である．

である．これは $s<0$ を満たすから，求める s のとり得る値の範囲は

$$s<\boxed{-1}$$

である．さらに，$s=\log_a b$ であるから

$$\log_a b<-1$$

より

$$\log_a b<\log_a a^{-1}$$

$$\log_a b<\log_a \frac{1}{a}$$

となり，$0<a<1$ であるから

$$b>\frac{1}{a}$$

となる．したがって，$\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

第２問　微分法・積分法

a，b，c を実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とする．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2+\boxed{\text{イウ}}x+\boxed{\text{エ}}$$

である．

$f(x)$ が $x=-1$ で極大，$x=3$ で極小となるとき

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\left(x+\boxed{\text{オ}}\right)\left(x-\boxed{\text{カ}}\right)$$

と表されるから

$$a=\boxed{\text{キク}},\ b=\boxed{\text{ケコ}}$$

である．さらに $f(x)$ の極大値が 7 のとき

$$c=\boxed{\text{サ}}$$

である．

以下，$a=\boxed{\text{キク}}$，$b=\boxed{\text{ケコ}}$，$c=\boxed{\text{サ}}$ とし，座標平面上で曲線 $y=f(x)$ を C とする．

曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(2,\ f(2))$ における C の接線を ℓ とする．

$f'(2)=\boxed{\text{シス}}$ であるから，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{シス}}x-\boxed{\text{セ}}$$

である．また，曲線 C と直線 ℓ の共有点は二つあり，そのうち A でない方を B とすると，点 B の座標は $\left(\boxed{\text{ソタ}},\ \boxed{\text{チ}}\right)$ である．

ここで，$g(x)=px^2+q$ $(p\neq 0)$ とし，曲線 $y=g(x)$ を D とする．D が 2 点 A，B を通るとき

$$p=\boxed{\text{ツテ}},\ q=\boxed{\text{トナ}}$$

であり，このとき曲線 D と直線 ℓ で囲まれた部分のうち，$x\leqq 0$ を満たす部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である．

次に，曲線 C，D 上にそれぞれ点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，点 $\mathrm{Q}(t,\ g(t))$ をとる．

線分 PQ の長さを $h(t)$ とすると，$\boxed{\text{ソタ}}<t<2$ のとき

$$h(t)=-t^3-\boxed{\text{ノ}}t^2+\boxed{\text{ハ}}t+\boxed{\text{ヒフ}}$$

であり，t が $\boxed{\text{ソタ}}<t<2$ の範囲で変化するとき，$h(t)$ は

$$t=\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}-\boxed{\text{ホ}}$$

において最大となる．

【解説】 問題

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c.\ (a,\ b,\ c\ は実数)$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{3}x^2+\boxed{2a}x+\boxed{b} \qquad \cdots ①$$

である．

☜ **導関数**

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3)$

$(c)'=0$ (c は定数).

$f(x)$ が $x=-1,\ 3$ で極値をとるから

$$f'(-1)=f'(3)=0$$

が成り立つ．よって

$$f'(x)=3(x+1)(x-3)$$

と表され，これを展開すると

$$f'(x)=3x^2-6x-9 \qquad \cdots ②$$

となる．① と ② より

$$\begin{cases} 2a=-6 \\ b=-9 \end{cases}$$

となるから

$$a=-3,\ b=-9$$

である．このとき

☜ ① より

$$\begin{cases} f'(-1)=3-2a+b \\ f'(3)=27+6a+b \end{cases}$$

であり，これと $f'(-1)=f'(3)=0$ より $a,\ b$ の値を求めてもよい．

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+c$$

であり，$f(x)$ の増減は次の表のようになり，確かに $f(x)$ は $x=-1$ で極大，$x=3$ で極小となる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって

$$f'(x)=3\left(x+\boxed{1}\right)\left(x-\boxed{3}\right)$$

であり

$$a=\boxed{-3},\ b=\boxed{-9}$$

である．

増減表より極大値は $f(-1)=c+5$ であり，これが 7 であるから，$c+5=7$ より $c=\boxed{2}$ である．

☜ $$\left\{\begin{aligned} &f(-1) \\ &=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)+c \\ &=c+5. \end{aligned}\right.$$

よって

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$$

☜ $c=2.$

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$

であるから

$$f(2)=-20,\ f'(2)=\boxed{-9}$$

である．これらのことより，点 $\mathrm{A}(2,\ f(2))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = -9(x-2) - 20$$

すなわち

$$y = -9x - \boxed{2}$$

である．

曲線 C と直線 ℓ の共有点の x 座標は，方程式

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = -9x - 2$$

の実数解である．この方程式を解くと

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \quad \cdots ③$$

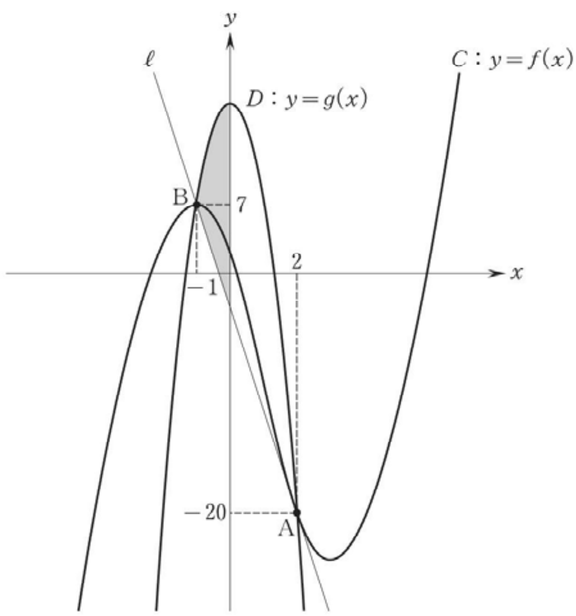
$$(x+1)(x-2)^2 = 0$$

より

$$x = -1,\ 2$$

である．

点Ａの x 座標は２であるから，点Ｂの x 座標は -1 である．さらに，点Ｂは曲線 C 上にあるから，その y 座標は極大値の７である．よって，点Ｂの座標は $\left(\boxed{-1},\ \boxed{7}\right)$ である．



（図１）

$g(x) = px^2 + q$ $(p \neq 0)$ であり，$D : y = g(x)$ である．

曲線 D が２点Ａ，Ｂを通るとき

$$\begin{cases} g(2) = -20 \\ g(-1) = 7 \end{cases}$$

が成り立つから

$$\begin{cases} 4p + q = -20 \\ p + q = 7 \end{cases}$$

より $p = \boxed{-9}$，$q = \boxed{16}$ である．

したがって，$g(x) = -9x^2 + 16$ である．

☜ **接線の方程式**

点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

である．

☜ C と ℓ は点 $\mathrm{A}(2,\ f(2))$ で接しているから，３次方程式③は $x=2$ を重解にもつことがわかる．

☜ $\mathrm{A}(2,\ -20)$，$\mathrm{B}(-1,\ 7)$．

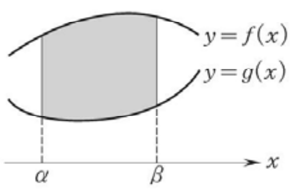
☜ $p \neq 0$ を満たす．

曲線 D と直線 ℓ で囲まれた部分のうち，$x \leqq 0$ を満たす部分は(図1)の影の部分であるから，その面積は

$$\int_{-1}^{0}\{(-9x^2+16)-(-9x-2)\}\,dx$$
$$=-9\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)\,dx$$
$$=-9\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{0}$$
$$=-9\left\{0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right\}$$
$$=\frac{\boxed{21}}{\boxed{2}}$$

である．

面積



上図の影の部分の面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

である．

不定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

（ただし $n=0,\ 1,\ 2$ であり，C は積分定数）

(図1)より，$-1<t<2$ において $g(t)>f(t)$ であるから

$$h(t)=g(t)-f(t)$$
$$=(-9t^2+16)-(t^3-3t^2-9t+2)$$
$$=-t^3-\boxed{6}\,t^2+\boxed{9}\,t+\boxed{14}$$

である．これより

$$h'(t)=-3t^2-12t+9$$
$$=-3(t^2+4t-3)$$

である．

ここで，$-1<t<2$ において $h'(t)=0$ を満たす t の値は

$$t=\sqrt{7}-2$$

である．よって，$-1<t<2$ における $h(t)$ の増減は以下のようになる．

$t^2+4t-3=0$ を解くと

$$t=-2\pm\sqrt{7}.$$

ここで $2<\sqrt{7}<3$ より

$$\begin{cases}0<-2+\sqrt{7}<1\\ -5<-2-\sqrt{7}<-4\end{cases}$$

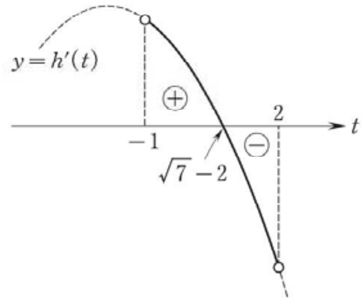
であるから，$-1<t<2$ を満たすものは

$$t=\sqrt{7}-2$$

である．

t	(-1)	$\cdots$	$\sqrt{7}-2$	$\cdots$	(2)
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	極大	↘	

$h'(t)$ の符号の変化は $y=h'(t)$ のグラフをかくとわかりやすい．



したがって，t が $-1<t<2$ の範囲で変化するとき，$h(t)$ は

$$t=\sqrt{\boxed{7}}-\boxed{2}$$

において最大となる．

第3問　数　列

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を p とする．$a_4=10$ のとき

$$a_1+\boxed{\text{ア}}\,p=10$$

が成り立つ．さらに，$a_9=25$ のとき

$$a_1=\boxed{\text{イ}},\quad p=\boxed{\text{ウ}}$$

である．以下，$a_1=\boxed{\text{イ}}$，$p=\boxed{\text{ウ}}$ とする．

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}n^2-\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

次に，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\sqrt{\dfrac{a_n-1}{3}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．

(1)　$$(b_{n+1}+b_n)(b_{n+1}-b_n)=\boxed{\text{ク}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{\boxed{\text{ク}}}{b_{k+1}+b_k}=\boxed{\text{ケコ}}$$

である．

(2)　自然数 n に対して，$m\leqq b_n$ を満たす最大の整数 m を c_n として，数列 $\{c_n\}$ を定める．このとき

$$c_4=\boxed{\text{サ}},\quad c_5=\boxed{\text{シ}},\quad c_9=\boxed{\text{ス}},\quad c_{10}=\boxed{\text{セ}}$$

である．

0 以上の整数 ℓ に対して，$c_n=\ell$ を満たす自然数 n の範囲を ℓ を用いて表すと

$$\ell^2+\boxed{\text{ソ}}\leqq n\leqq\left(\ell+\boxed{\text{タ}}\right)^2$$

であり

$$\sum_{k=1}^{100}c_k=\boxed{\text{チツテ}}$$

である．

【解説】　　**問題**

等差数列 $\{a_n\}$ の公差が p であるから $a_4=10$ のとき

$$a_1+\boxed{3}\,p=10\qquad\cdots①$$

☜ **等差数列の一般項**

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d.$$

である．さらに，$a_9=25$ のとき

$$a_1+8p=25\qquad\cdots②$$

であるから，①，② より

$$a_1=\boxed{1},\quad p=\boxed{3}$$

である．よって

$$a_n=1+(n-1)\cdot3=3n-2$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$= \frac{n\{1+(3n-2)\}}{2}$$

$$= \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2 - \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ **等差数列の和**

初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は

$$\frac{n(a+\ell)}{2}.$$

である．

また，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，$a_n=3n-2$ より

$$b_n = \sqrt{\frac{a_n-1}{3}} = \sqrt{\frac{(3n-2)-1}{3}}$$

$$= \sqrt{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(1)
$$(b_{n+1}+b_n)(b_{n+1}-b_n) = {b_{n+1}}^2 - {b_n}^2$$

$$= (\sqrt{n})^2 - (\sqrt{n-1})^2$$

☜ $b_{n+1}=\sqrt{n}$，$b_n=\sqrt{n-1}$.

$$= n-(n-1)$$

$$= \boxed{1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{b_{k+1}+b_k} = \sum_{k=1}^{100} (b_{k+1}-b_k)$$

$$= b_{101}-b_1$$

$$= \sqrt{100}-\sqrt{0}$$

$$= \boxed{10}$$

☜
$$\begin{array}{rl} & b_2-b_1 \\ & b_3-b_2 \\ & b_4-b_3 \\ & \quad\vdots \\ +) & b_{101}-b_{100} \\ \hline & b_{101}-b_1. \end{array}$$

である．

(2) $c_n=(m \leqq \sqrt{n-1}$ を満たす最大の整数 $m)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

☜ $b_n=\sqrt{n-1}$.

であるから

$c_4 = (m \leqq \sqrt{3}$ を満たす最大の整数 $m) = \boxed{1}$ ☜ $1<\sqrt{3}<2$.

$c_5 = (m \leqq \sqrt{4}$ を満たす最大の整数 $m) = \boxed{2}$ ☜ $\sqrt{4}=2$.

$c_9 = (m \leqq \sqrt{8}$ を満たす最大の整数 $m) = \boxed{2}$ ☜ $2<\sqrt{8}<3$.

$c_{10} = (m \leqq \sqrt{9}$ を満たす最大の整数 $m) = \boxed{3}$ ☜ $\sqrt{9}=3$.

である．

0 以上の整数 ℓ に対して，$c_n=\ell$ を満たす自然数 n は

$$\ell \leqq \sqrt{n-1} < \ell+1$$

☜ ℓ は $\sqrt{n-1}$ 以下の最大の整数だから
$$\ell \leqq \sqrt{n-1} < \ell+1$$
を満たす．

を満たす．各辺の値は 0 以上であるから

$$\ell^2 \leqq n-1 < (\ell+1)^2$$

すなわち

$$\ell^2+1 \leqq n < (\ell+1)^2+1$$

より

$$\ell^2+\boxed{\ 1\ }\leqq n\leqq\left(\ell+\boxed{\ 1\ }\right)^2$$

が成り立つ．

☜ n，ℓ は整数だから
$n<(\ell+1)^2+1 \iff n\leqq(\ell+1)^2$.

よって，$c_n=\ell$ を満たす自然数 n は

$$\ell^2+1,\ \ell^2+2,\ \ell^2+3,\ \cdots,\ (\ell+1)^2-1,\ (\ell+1)^2$$

の $2\ell+1$ 個である．

☜ $(\ell+1)^2-\ell^2=2\ell+1$.

これより

$0^2+1\leqq n\leqq 1^2$ のとき，$c_n=0$　☜ $c_n=0$ となる n は 1 個.

$1^2+1\leqq n\leqq 2^2$ のとき，$c_n=1$　☜ $c_n=1$ となる n は 3 個.

$2^2+1\leqq n\leqq 3^2$ のとき，$c_n=2$　☜ $c_n=2$ となる n は 5 個.

⋮

$\ell^2+1\leqq n\leqq (\ell+1)^2$ のとき，$c_n=\ell$　☜ $c_n=\ell$ となる n は $2\ell+1$ 個.

⋮

$9^2+1\leqq n\leqq 10^2$ のとき，$c_n=9$　☜ $c_n=9$ となる n は 19 個.

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{100}c_k &= \underbrace{0}_{1\text{個}}+\underbrace{1+1+1}_{3\text{個}}+\underbrace{2+2+2+2+2}_{5\text{個}}\\
&\quad +\cdots+\underbrace{\ell+\ell+\cdots+\ell}_{2\ell+1\text{ 個}}+\cdots\\
&\quad +\underbrace{9+9+\cdots+9}_{19\text{個}}\\
&=\sum_{\ell=0}^{9}\ell(2\ell+1)\\
&=\sum_{\ell=1}^{9}(2\ell^2+\ell)\\
&=2\sum_{\ell=1}^{9}\ell^2+\sum_{\ell=1}^{9}\ell\\
&=2\cdot\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\\
&=\boxed{615}
\end{aligned}$$

である．

☜ $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{9}\ell(2\ell+1)=0+\sum_{\ell=1}^{9}\ell(2\ell+1)$
$\displaystyle=\sum_{\ell=1}^{9}(2\ell^2+\ell)$.

☜ **和の公式**

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

第 4 問　平面ベクトル

三角形 OAB において，辺 OA を 3:1 に内分する点を C，辺 AB の中点を M とする．

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OB}$$

である．直線 CM 上の点を P とすると，s を実数として $\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CM}$ と表せるから

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{\boxed{キ}-s}{\boxed{ク}}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{s}{\boxed{ケ}}\overrightarrow{OB}$$

である．

k を正の実数として，$OA=4$，$OB=k$，$\angle AOB=60^\circ$ とする．このとき

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{コ}k$$

である．次に，点 B を通り $\overrightarrow{OA}$ に垂直な直線と直線 OA の交点を H とすると

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=\boxed{サ}$$

であるから

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}k\overrightarrow{OA}$$

である．

さらに，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とすると

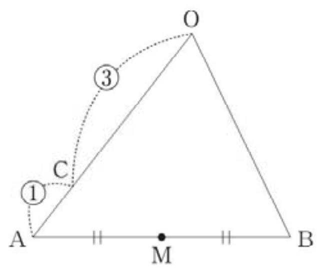
$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\boxed{セ}\overrightarrow{BH}$$

と表せるから，点 D が直線 CM 上にあるとき

$$k=\boxed{ソ}$$

である．このとき，$\left|\overrightarrow{MD}\right|=\dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チツ}}}{\boxed{テ}}$ である．

【解説】　問題



辺 OA を 3:1 に内分する点が C だから

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\overrightarrow{OA}\qquad\cdots①$$

である．また，辺 AB の中点が M だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ②$$

である．直線 CM 上の点を P とすると，s を実数として $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ と表せる．これを変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

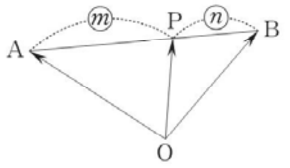
と表され，これに ①，② を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{\boxed{3}-s}{\boxed{4}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{s}{\boxed{2}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ③$$

である．

内分点の公式



線分 AB を $m:n$ の比に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}.$$

とくに，$m=n=1$ のとき，点 P は線分 AB の中点となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}.$$

次に，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=k$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4k\cos 60^\circ$$

$$=\boxed{2}\,k$$

である．点 B を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な直線と直線 OA の交点を H とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|\cos 90^\circ=\boxed{0}$$

であるから，t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(t\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

すなわち

$$t\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

と変形できる．$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2k$ より

$$16t-2k=0 \quad すなわち \quad t=\frac{1}{8}k$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である．

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ ($0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$) とすると

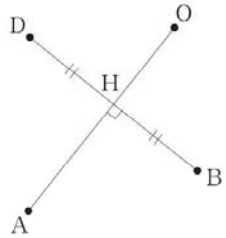
$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|\cos\theta.$$

直線 OA に関して点 B と対称な点を D とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boxed{2}\,\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$

と表せる．さらにこれは



$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+2(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\overrightarrow{OB}+2\left(\frac{k}{8}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$$

☜ $\overrightarrow{OH}=\frac{k}{8}\overrightarrow{OA}$.

$$=\frac{k}{4}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB} \quad \cdots ④$$

と表せる．また，点 D が直線 CM 上にあるとき，実数 ℓ を用いて ③ と同様にして

$$\overrightarrow{OD}=\left(\frac{3-\ell}{4}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{\ell}{2}\overrightarrow{OB} \quad \cdots ⑤$$

と表せる．$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから，④，⑤ より

$$\begin{cases} \dfrac{k}{4}=\dfrac{3-\ell}{4} \\ -1=\dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$

☜
ベクトルの相等

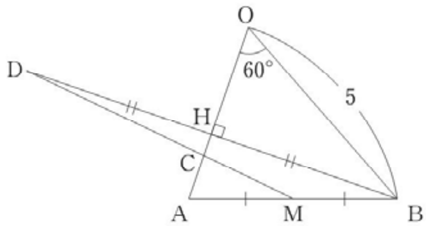
α，β，α'，β' が実数であり，
$\vec{x}\neq\vec{0}$，$\vec{y}\neq\vec{0}$，$\vec{x}\not\parallel\vec{y}$ のとき，

$$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\alpha'\vec{x}+\beta'\vec{y} \iff \begin{cases}\alpha=\alpha' \\ \beta=\beta'.\end{cases}$$

が成り立つ．これらを解くと

$$\ell=-2,\ k=\boxed{5}$$

☜



である．$k=5$ を ④ に代入すると

$$\overrightarrow{OD}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$$

であるから

$$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OM}$$

$$=\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{3}{4}(\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB})$$

である．よって

$$|\overrightarrow{MD}|^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|^2$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(|\overrightarrow{OA}|^2-4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^2(4^2-4\times10+4\times5^2)$$

☜ $|\overrightarrow{OA}|=4$，$|\overrightarrow{OB}|=k=5$，
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2k=10$.

$$=\frac{3^2\times19}{4}$$

であるから

$$|\overrightarrow{MD}|=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{19}}}{\boxed{2}}$$

である．