センター模擬試験

第１回　数学　ⅠＡ

解説と解答

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{ア+\sqrt{イウ}}{エ}$	$\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$	2	
	$\dfrac{オ-\sqrt{カキ}}{ク}$	$\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$	2	
	$\dfrac{ケ+\sqrt{コサ}}{シ}$	$\dfrac{7+\sqrt{41}}{4}$	3	
	ス，セ	3，4	3	
	ソ	2	2	
	タ	1	3	
	チ	0	2	
	ツ	2	3	
	第1問　自己採点小計		(20)	
第2問	アイa	$-2a$	3	
	a^2-ウ$a-$エ	a^2-3a-5	3	
	オ	1	2	
	a^2-カ$a-$キ	a^2-4a-5	2	
	ク	9	3	
	ケコサ	-15	3	
	$a<$シス	$a<-1$	3	
	セ$<a<$ソ	$0<a<5$	3	
	タ$\sqrt{チ}$	$-\sqrt{5}$	3	
	第2問　自己採点小計		(25)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	$\dfrac{ア\sqrt{イ}}{ウ}$	$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$	3	
	$\dfrac{エ\sqrt{オ}}{カ}$	$\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$	3	
	$\dfrac{キ\sqrt{クケ}}{コ}$	$\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$	3	
	サ	2	3	
	$\sqrt{シ}$	$\sqrt{6}$	3	
	ス	3	4	
	$\dfrac{\sqrt{セ}}{ソ}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{タ}}{チ}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	4	
	ツ	0	4	
	第3問　自己採点小計		(30)	
第4問	アイ	24	2	
	ウ	1	3	
	エ	4	3	
	オ	2	2	
	カ	6	2	
	$\dfrac{キ}{クケコ}$	$\dfrac{1}{216}$	2	
	$\dfrac{サ}{シス}$	$\dfrac{2}{27}$	3	
	$\dfrac{セソ}{タチツ}$	$\dfrac{25}{216}$	4	
	$\dfrac{テトナ}{ニヌネ}$	$\dfrac{301}{216}$	4	
	第4問　自己採点小計		(25)	
	自己採点合計		(100)	

第１問　方程式・不等式，集合・論理

〔1〕 2次方程式 $x^2-x-10=0$ の解のうち，大きい方を α とすると

$$\alpha=\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$$

であり

$$|\alpha-4|=\frac{\boxed{オ}-\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}}$$

である．

$p=\dfrac{1}{|\alpha-4|}$ とすると

$$p=\frac{\boxed{ケ}+\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$$

であり，不等式 $|x-p|<1$ を満たす整数 x は

$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$

である．ただし，$\boxed{ス}<\boxed{セ}$ とする．

〔2〕 a，b，c を正の整数とする．

(1) a，b がともに奇数のとき，a^2+b^2 を4で割ったときの余りは $\boxed{ソ}$ である．

(2) 次の $\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$，$\boxed{ツ}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

(i) 積 ab が偶数であることは a が偶数であるための $\boxed{タ}$．

(ii) $a^2+b^2=c^2$ が成り立つとする．

c が偶数であることは a と b がともに偶数であるための $\boxed{チ}$．

積 ab が5の倍数でないことは c が5の倍数であるための $\boxed{ツ}$．

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

【解説】

問題

〔1〕

2 次方程式 $x^2-x-10=0$ の解は,

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}$$

☜ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は実数)の解は,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

であるから,大きい方の解 α は,

$$\alpha=\frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{2}}$$

であり,

$$|\alpha-4|=\left|\frac{1+\sqrt{41}}{2}-4\right|$$

$$=\left|\frac{-7+\sqrt{41}}{2}\right|$$

☜ $-7+\sqrt{41}=-\sqrt{49}+\sqrt{41}<0.$

$$=-\frac{-7+\sqrt{41}}{2}$$

☜ $a<0$ のとき, $|a|=-a.$

$$=\frac{\boxed{7}-\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{2}}$$

である.

$p=\dfrac{1}{|\alpha-4|}$ とすると,

$$p=\frac{2}{7-\sqrt{41}}$$

$$=\frac{2(7+\sqrt{41})}{(7-\sqrt{41})(7+\sqrt{41})}$$

$$=\frac{2(7+\sqrt{41})}{49-41}$$

$$=\frac{\boxed{7}+\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{4}}$$

である.

不等式 $|x-p|<1$ の解は,

$$-1<x-p<1$$

$$p-1<x<p+1 \quad \cdots①$$

である.

☜ $a>0$ のとき, X の不等式 $|X|<a$ の解は,

$$-a<X<a$$

である.

ここで, $36<41<49$ すなわち $6<\sqrt{41}<7$ より,

$$13<7+\sqrt{41}<14$$

$$(3<)\frac{13}{4}<\frac{7+\sqrt{41}}{4}<\frac{7}{2}(<4)$$

であるから, $p=\dfrac{7+\sqrt{41}}{4}$ より,

$$3 < p < 4$$

であり，

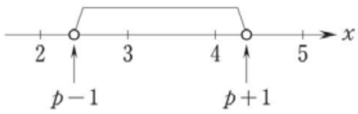
$$\begin{cases} 2 < p-1 < 3, \\ 4 < p+1 < 5 \end{cases}$$

である．

したがって，① すなわち $|x-p|<1$ を満たす整数 x は，

$\boxed{3}$，$\boxed{4}$

である．

☜ 

［2］

問題

(1) a，b がともに奇数のとき，

$$a=2a'+1,\ b=2b'+1 \quad (a',\ b' \text{ は整数})$$

とおくと，

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (2a'+1)^2+(2b'+1)^2 \\ &= 4(a'^2+a'+b'^2+b')+2 \end{aligned}$$

であるから，

a^2+b^2 を 4 で割ったときの余りは $\boxed{2}$

である．

(2)(i) 「積 ab が偶数である ⇒ a が偶数である」は偽

である．

☜ 反例は $a=1$，$b=2$．

また，

「a が偶数である ⇒ 積 ab が偶数である」は真

である．

したがって，積 ab が偶数であることは a が偶数であるための必要条件であるが，十分条件でない，すなわち $\boxed{タ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(ii) (1) と同様に考えると，a^2+b^2 を 4 で割ったときの余りは次の表のようになる．

a ＼ b	偶数	奇数
偶数	0	1
奇数	1	2

☜ (1) と同様に，a，b がともに偶数のとき，a^2+b^2 を 4 で割ったときの余りは 0 であり，a，b の一方が偶数で他方が奇数のとき，a^2+b^2 を 4 で割ったときの余りは 1 である．

また，

c が偶数のとき，c^2 を 4 で割ったときの余りは 0，

c が奇数のとき，c^2 を 4 で割ったときの余りは 1

であるから，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき，

c が偶数である $\Longleftrightarrow$ a と b がともに偶数である

である．

☜ a^2+b^2 を 4 で割ったときの余り

a ＼ b	偶数	奇数
偶数	0	1
奇数	1	2

表中の網掛け部分参照．

したがって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき，c が偶数であることは a と b がともに偶数であるための必要十分条件である，すなわち $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

☜ $a=6$，$b=8$，$c=10$ のとき，$a^2+b^2=c^2$ は成り立つから，$a^2+b^2=c^2$ を満たす偶数の a, b, c は確かに存在する．

整数 n を 5 で割ったときの余りによって分類すると，

$$n=5k,\ 5k\pm1,\ 5k\pm2 \quad (k\text{ は整数})$$

のいずれかの形であるから，

$$(*)\begin{cases} n=5k \text{ のとき} & n^2=5\cdot5k^2, \\ n=5k\pm1 \text{ のとき} & n^2=5(5k^2\pm2k)+1 \ (\text{複号同順}), \\ n=5k\pm2 \text{ のとき} & n^2=5(5k^2\pm4k)+4 \ (\text{複号同順}) \end{cases}$$

である．

積 ab が 5 の倍数でないとき，(*) より，a^2+b^2 を 5 で割ったときの余りは次の表のようになる (k, ℓ は整数)．

☜ 積 ab が 5 の倍数でないとき，a も b も 5 の倍数でないから，
$$\begin{cases} a=5k\pm1,\ 5k\pm2, \\ b=5\ell\pm1,\ 5\ell\pm2 \quad (k,\ \ell\text{ は整数}) \end{cases}$$
とおける．

a \ b	$5\ell\pm1$	$5\ell\pm2$
$5k\pm1$	2	0
$5k\pm2$	0	3

☜ 例えば，$a=5k+2$，$b=5\ell-2$ のとき，(*) より，a^2, b^2 を 5 で割ったときの余りはともに 4 であるから，
$$4+4=8=5+3$$
より，a^2+b^2 を 5 で割ったときの余りは，3 である．

この表より，積 ab が 5 の倍数でないとき，a^2+b^2 を 5 で割ったときの余りは，0，2，3 のいずれかである．

一方，(*) より，c^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかである．

よって，積 ab が 5 の倍数でなく $a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき，この両辺の a^2+b^2 と c^2 はいずれも 5 で割ったときの余りが 0 である．すなわち，c^2 は 5 の倍数であるから，(*) より，c は 5 の倍数である．

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき，

「積 ab が 5 の倍数でない $\Rightarrow$ c が 5 の倍数である」は真である．

☜ $a=3$，$b=4$，$c=5$ のとき，$a^2+b^2=c^2$ は成り立つから，$a^2+b^2=c^2$ を満たす整数 a, b, c で，ab が 5 の倍数でなく c が 5 の倍数であるものが確かに存在する．

また，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき，

「c が 5 の倍数である $\Rightarrow$ 積 ab が 5 の倍数でない」は偽

(反例は $a=15$，$b=20$，$c=25$)

である．

したがって，積 ab が 5 の倍数でないことは c が 5 の倍数であるための十分条件であるが，必要条件でない，すなわち $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

第2問　2次関数

a，b，c を定数とし，$a \neq 0$ とする．x の2次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．2次関数①の $x=-1$ のときの値と $x=3$ のときの値が一致する．このとき

$$b = \boxed{アイ}a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．さらに，G が点 $(-1,\ a^2-5)$ を通る．このとき

$$c = a^2 - \boxed{ウ}a - \boxed{エ} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

以下，②，③のとき，2次関数①とそのグラフ G を考える．

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{オ},\ a^2 - \boxed{カ}a - \boxed{キ}\right)$$

である．

(1)　$0 \leqq x \leqq 5$ における2次関数①の最小値が40であるとき

$$a = \boxed{ク} \quad または \quad a = \boxed{ケコサ}$$

である．

(2)　G が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は

$$a < \boxed{シス}, \qquad \boxed{セ} < a < \boxed{ソ}$$

である．

(3)　$a_1 < a_2$ である定数 a_1，a_2 に対して，$a=a_1$，$a=a_2$ のときの G をそれぞれ G_1，G_2 とする．G_1 と G_2 が x 軸に関して対称であるとき

$$a_1 = \boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}$$

である．

【解説】　問題

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad \cdots ①$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと，2次関数①の $x=-1$ のときの値と $x=3$ のときの値が一致するとき，

$$f(-1) = f(3)$$

が成り立つから，

$$a - b + c = 9a + 3b + c$$

より，

$$b = \boxed{-2}a \qquad \cdots ②$$

である．

さらに，関数①のグラフ G が点 $(-1,\ a^2-5)$ を通るとき，

$$f(-1) = a^2 - 5$$

であるから，

$$a-b+c=a^2-5$$
$$c=a^2-a+b-5$$

であり，これと ② より，

$$c=a^2-a+(-2a)-5$$
$$=a^2-\boxed{\ 3\ }a-\boxed{\ 5\ } \qquad \cdots ③$$

が成り立つ．

②，③ のとき，

$$f(x)=ax^2-2ax+a^2-3a-5$$
$$=a(x^2-2x)+a^2-3a-5$$
$$=a\{(x-1)^2-1\}+a^2-3a-5$$
$$=a(x-1)^2+a^2-4a-5$$

より，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{\ 1\ },\ a^2-\boxed{\ 4\ }a-\boxed{\ 5\ }\right)$$

である．

放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は，

$(p,\ q)$．

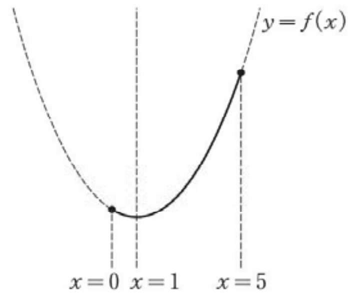
(1)(i) $a>0$ のとき，$0\leqq x\leqq 5$ における 2 次関数 ① の最小値は $f(1)$ である．これが 40 であるとき，

$$f(1)=40$$
$$a^2-4a-5=40$$
$$a^2-4a-45=0$$
$$(a+5)(a-9)=0$$
$$a=-5,\ 9.$$

$a>0$ より，

$$a=9.$$

$a>0$ のとき，グラフ G は下に凸．



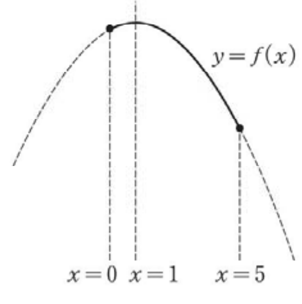
(ii) $a<0$ のとき，$0\leqq x\leqq 5$ における 2 次関数 ① の最小値は $f(5)$ である．これが 40 であるとき，

$$f(5)=40$$
$$a^2+12a-5=40$$
$$a^2+12a-45=0$$
$$(a+15)(a-3)=0$$
$$a=-15,\ 3.$$

$a<0$ より，

$$a=-15.$$

$a<0$ のとき，グラフ G は上に凸．



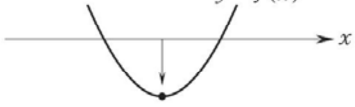
(i)，(ii) より，$0\leqq x\leqq 5$ における 2 次関数 ① の最小値が 40 であるとき，

$$a=\boxed{\ 9\ } \quad または \quad a=\boxed{-15}$$

である．

(2)(i) $a>0$ のとき，G が x 軸と異なる 2 点で交わるのは，G の頂点の y 座標が負のときであるから，a の値の範囲は，

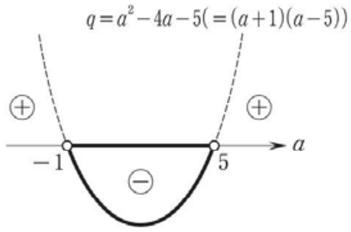
$$a^2-4a-5<0$$



(頂点が x 軸より下側にある)

$$(a+1)(a-5)<0$$

$$-1<a<5.$$



$a>0$ より，

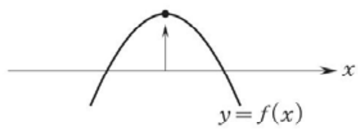
$$0<a<5.$$

(ii) $a<0$ のとき，G が x 軸と異なる 2 点で交わるのは，G の頂点の y 座標が正のときであるから，a の値の範囲は，

$$a^2-4a-5>0$$

$$(a+1)(a-5)>0$$

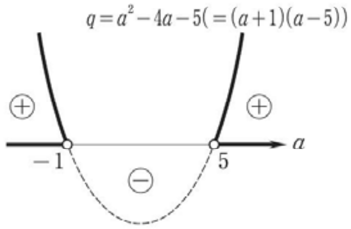
$$a<-1,\ 5<a.$$



(頂点が x 軸より上側にある)

$a<0$ より，

$$a<-1.$$



(i), (ii) より，G が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は，

$$a<\boxed{-1},\qquad \boxed{0}<a<\boxed{5}$$

である．

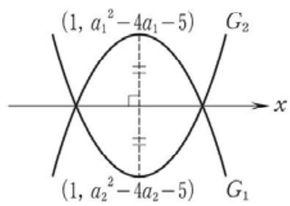
(3) G_1 と G_2 が x 軸に関して対称であるとき，G_1，G_2 を表す関数の x^2 の係数の絶対値は等しく，G_1 と G_2 の一方は上に凸，他方は下に凸であるから，

$$a_2=-a_1. \qquad \cdots ④$$

また，G_1 と G_2 の頂点が x 軸に関して対称であるから，

$$a_2{}^2-4a_2-5=-(a_1{}^2-4a_1-5) \qquad \cdots ⑤$$

が成り立つ．



軸は a の値によらず，ともに直線 $x=1$.

④ を ⑤ に代入すると，

$$a_1{}^2+4a_1-5=-(a_1{}^2-4a_1-5)$$

$$a_1{}^2=5.$$

$a_1<a_2$ と ④ より，$a_1<0<a_2$ であるから，

$$a_1=\boxed{-}\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

第3問　図形と計量・平面図形

$\triangle$ABC において，AB$=\sqrt{10}$，AC$=1$，$\cos\angle$BAC$=-\dfrac{\sqrt{10}}{8}$ であるとき

$$\mathrm{BC}=\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ であり，$\triangle$ABC の外接円 O の半径は $\boxed{\text{サ}}$ である．

円 O の周上に点 D を線分 AD が円 O の直径となるようにとり，線分 AD と線分 BC の交点を E とする．このとき，BD$=\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ であり，$\dfrac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AE}}=\boxed{\text{ス}}$ である．

また，CE$=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

$\triangle$OAC の外接円と直線 BC の交点のうち C と異なる方を F とする．このとき

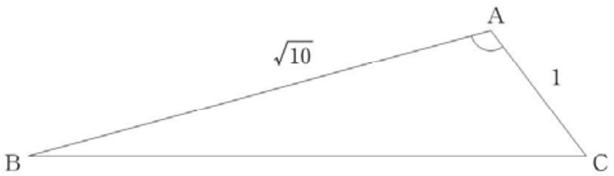
$$\mathrm{EF}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である．

線分 CE 上に点 G を CG : GE$=1:2$ となるようにとる．このとき，点 O は $\triangle$DFG の $\boxed{\text{ツ}}$ である．次の⓪～②のうちから $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを一つ選べ．

⓪　重心　　　①　外心　　　②　内心

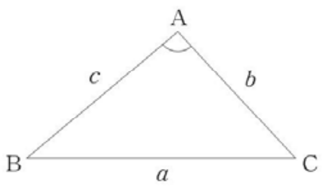
【解説】　　問題



余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC}\\&=1^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot1\cdot\sqrt{10}\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{8}\right)\\&=\frac{27}{2}\end{aligned}$$

余弦定理



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}&=\sqrt{\frac{27}{2}}\\&=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2}$$
$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{8}}$$

☜ $0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき,

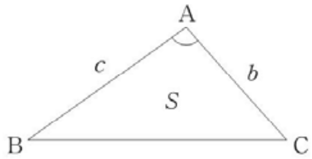
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

であり，△ABC の面積は，

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{8}$$
$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{8}}$$

である.

☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

△ABC の外接円 O の半径を R とすると，正弦定理より，

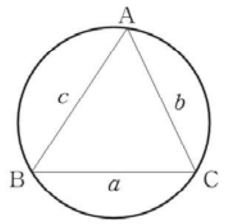
$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$$

であるから，

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{\frac{3\sqrt{6}}{2}}{2\cdot\frac{3\sqrt{6}}{8}}$$
$$=\boxed{2}$$

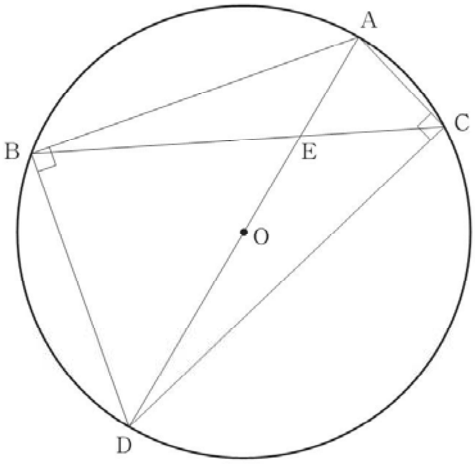
である.

☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

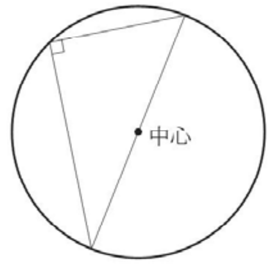
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$



線分 AD は円 O の直径であるから $\angle\mathrm{ABD}=90^\circ$ であり，△ABD は直角三角形である.

△ABD に三平方の定理を用いて，

☜



半円の弧に対する円周角は 90° である.

$$\mathrm{BD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AB}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-(\sqrt{10})^2}$$
$$=\sqrt{\boxed{6}}$$

☜ $\mathrm{AD}=2R=4$.

である．

同様に，△ACD は直角三角形であり，これに三平方の定理を用いて，

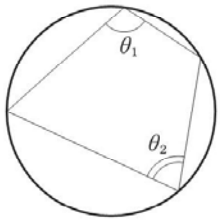
$$\mathrm{CD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AC}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-1^2}$$
$$=\sqrt{15}$$

である．

四角形 ABDC は円に内接する四角形であるから，

$$\angle\mathrm{BDC}=180^\circ-\angle\mathrm{BAC}$$

☜ 円に内接する四角形の対角の和は 180° である．

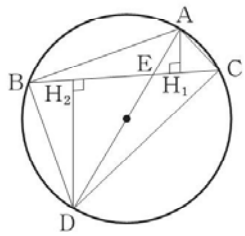


$\theta_1+\theta_2=180^\circ$.

であり，

$$\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AE}}=\frac{(\triangle\mathrm{BCD}\text{ の面積})}{(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BAC})}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{BAC}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{10}\cdot 1}$$
$$=\boxed{3} \quad \cdots ①$$

☜



☜ 点 A，D から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC の交点をそれぞれ H_1，H_2 とする．

$\triangle\mathrm{AEH_1}\backsim\triangle\mathrm{DEH_2}$ であるから，

$$\mathrm{AH_1}:\mathrm{DH_2}=\mathrm{AE}:\mathrm{DE}$$

であり，これを用いて，

$$\frac{(\triangle\mathrm{BCD}\text{ の面積})}{(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\mathrm{BC}}\cdot\mathrm{DH_2}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\mathrm{BC}}\cdot\mathrm{AH_1}}$$
$$=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AE}}.$$

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$.

である．

同様にして，

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}=\frac{(\triangle\mathrm{ACD}\text{ の面積})}{(\triangle\mathrm{ABD}\text{ の面積})}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}}$$
$$=\frac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}}$$
$$=\frac{1\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

であるから，$\mathrm{CE}:\mathrm{EB}=1:2$ であり，

$$CE = \frac{1}{1+2}BC$$

$$= \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ 次のようにしてもよい．

弧 AB に対する円周角を考えると，

$\angle BDE = \angle ACE$ であり，

$\angle DEB = \angle CEA$（対頂角）であるから，

$$\triangle BDE \backsim \triangle ACE.$$

これより，

$$BD : DE = AC : CE$$

すなわち

$$CE = \frac{DE \cdot AC}{BD}$$

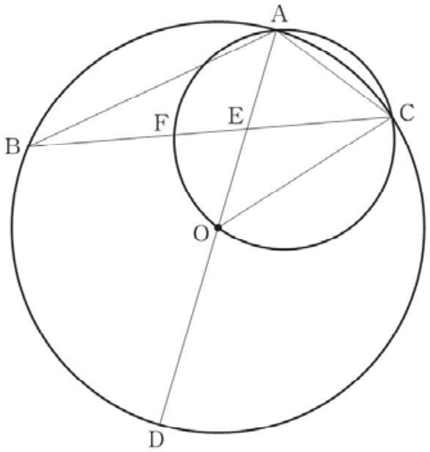
が成り立ち，① より，

AE : ED = 1 : 3 であるから，

$$DE = \frac{3}{4}AD.$$

したがって，

$$CE = \frac{3AD \cdot AC}{4BD} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

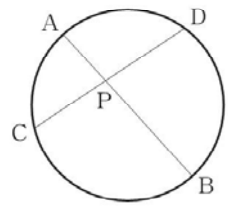


方べきの定理により，

$$EF \cdot EC = EA \cdot EO \quad \cdots ②$$

が成り立つ．

☜ **方べきの定理**



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

ここで，① より，AE : ED = 1 : 3 であるから，

$$AE = \frac{1}{4}AD$$

$$= 1$$

であり，

$$EO = AO - AE$$

$$= R - 1$$

$$= 1$$

☜ $R = 2.$

である．

② より，

$$EF \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 1 \cdot 1$$

であるから，

$$EF = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$$

である．

CG : GE = 1 : 2 より，

$$EG = \frac{2}{3}CE$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である．

　よって，

$$\mathrm{FE}=\mathrm{EG}$$

が成り立ち，線分 DE は，△DFG の中線の一つである．

　また，OD＝R＝2，OE＝1 より，

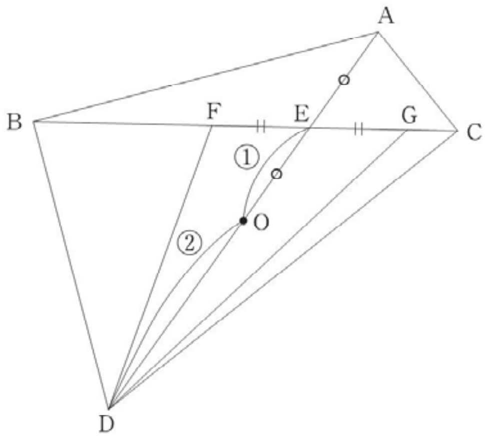
$$\mathrm{DO}:\mathrm{OE}=2:1$$

である．

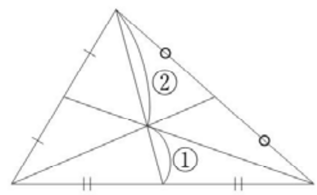
　したがって，

「点 O は △DFG の重心」

である，すなわち $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．



三角形の重心



　三角形の重心は，3 本の中線の交点であり，それぞれの中線を 2：1 の比に分ける．

　線分 AD は円 O の直径であり，BE ≠ EC より，∠BED ≠ 90°．このことと FE＝EG より，DF ≠ DG である．したがって，点 O は線分 FG の垂直二等分線上にないから，点 O は △DFG の外心でなく，点 O は ∠FDG の二等分線上にないから，点 O は △DFG の内心でない．

第4問 確　率

1個のさいころを3回投げ，出た目を順に a，b，c とする．次の規則にしたがって数字の列を作る．数字が一つだけのときも数字の列と呼ぶことにする．

まず a を書く．

次に

（A） $b<a$ のときは，数字の列の左側に b を付け加える

（B） $a<b$ のときは，数字の列の右側に b を付け加える

（C） $b=a$ のときは，何も付け加えない

さらに

（D） $c<a$ かつ $c<b$ のときは，数字の列の左側に c を付け加える

（E） $a<c$ かつ $b<c$ のときは，数字の列の右側に c を付け加える

（F） （D），（E）以外のときは，何も付け加えない

例えば

$(a, b, c)=(3, 1, 6)$ のときは，数字の列は「136」

$(a, b, c)=(3, 3, 1)$ のときは，数字の列は「13」

$(a, b, c)=(2, 4, 3)$ のときは，数字の列は「$\boxed{アイ}$」

となる．

以下の問いでは，さいころを3回投げ終わったときにできる数字の列について考える．

(1) 数字の列が「2」となるさいころの目の出方は $\boxed{ウ}$ 通りである．

数字の列が「125」となるさいころの目の出方は $\boxed{エ}$ 通りである．

数字の列が「24」となるとき，$a=b$ であるさいころの目の出方は $\boxed{オ}$ 通りであり，$a \neq b$ であるさいころの目の出方は $\boxed{カ}$ 通りである．

(2) 次のように値 X を定める．

数字の列の字数が1のとき，X は書かれている数

数字の列の字数が2のとき，X は0

数字の列の字数が3のとき，X は数字の列の中央に書かれている数

とする．

(i) 数字の列の字数が1で $X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケコ}}$ であり，数字の列の字数が3で $X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ である．

(ii) $X=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチツ}}$ である．

(iii) X の期待値は $\dfrac{\boxed{テトナ}}{\boxed{ニヌネ}}$ である．

【解説】 問題

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 3)$ のとき，数字の列は，

$$\boxed{24}$$

となる．

☜ $a<b$ より(B)，さらに，$a \leqq c \leqq b$ より(F)が適用される．

⑴ 数字の列が「2」となるのは，

「$a=2$ で，(C)と(F)が適用されるとき」

であるから，

☜ a を書いただけで，他に何も付け加えない．

$$(a,\ b,\ c)=(2,\ 2,\ 2)$$

のときであり，さいころの目の出方は，

$\boxed{1}$ 通り …①

である．

数字の列が「125」となるのは，

『「(A)と(D)」または「(B)と(D)」または

「(A)と(E)」または「(B)と(E)」が適用されるとき』

であり，

$$(a,\ b,\ c)=(5,\ 2,\ 1),\ (2,\ 5,\ 1),\ (2,\ 1,\ 5),\ (1,\ 2,\ 5)$$

のときであるから，さいころの目の出方は，

$\boxed{4}$ 通り …②

である．

☜
(Ⅰ) (A)と(D)が適用されるのは，

$$c<b<a$$

のときであり，数字の列は「cba」．

(Ⅱ) (B)と(D)が適用されるのは，

$$c<a<b$$

のときであり，数字の列は「cab」．

(Ⅲ) (A)と(E)が適用されるのは，

$$b<a<c$$

のときであり，数字の列は「bac」．

(Ⅳ) (B)と(E)が適用されるのは，

$$a<b<c$$

のときであり，数字の列は「abc」．

数字の列が「24」となるとき，$a=b$ であるのは，

『「(C)と(D)」または「(C)と(E)」が適用されるとき』

であり，

$$(a,\ b,\ c)=(4,\ 4,\ 2),\ (2,\ 2,\ 4)$$

のときであるから，さいころの目の出方は，

$\boxed{2}$ 通り

である．

☜ (Ⅴ) (C)と(D)が適用されるのは，

$$c<a=b$$

のときであり，数字の列は「ca」．

(Ⅵ) (C)と(E)が適用されるのは，

$$a=b<c$$

のときであり，数字の列は「ac」．

また，数字の列が「24」となるとき，$a \neq b$ であるのは，

『「(A)と(F)」または「(B)と(F)」が適用されるとき』

であり，

$$(a,\ b,\ c)=(4,\ 2,\ 2),\ (4,\ 2,\ 3),\ (4,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 2),\ (2,\ 4,\ 3),\ (2,\ 4,\ 4)$$

のときであるから，さいころの目の出方は，

$\boxed{6}$ 通り

である．

☜ (Ⅶ) (A)と(F)が適用されるのは，

$b<a$ かつ $b \leqq c \leqq a$

のときであり，数字の列は「ba」．

(Ⅷ) (B)と(F)が適用されるのは，

$a<b$ かつ $a \leqq c \leqq b$

のときであり，数字の列は「ab」．

☜ 数字の列が「24」となるさいころの目の出方は，

$$2+6=8\ (\text{通り})$$

である．

⑵ さいころの目の出方の総数は，

$$6 \times 6 \times 6=216\ (\text{通り})$$

であり，これらは同様に確からしい．

(i) 数字の列の字数が1で $X=2$ となるさいころの目の出方

は，① より，

1 通り

であるから，数字の列の字数が 1 で $X=2$ となる確率は，

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{216}}$$

である．

数字の列の字数が 3 で $X=2$ となるとき，数字の列は，

「123」，「124」，「125」，「126」

の 4 つの場合がある．

☜ 数字の列の字数が 3 となるのは 26 頁右欄の(I)～(IV)のときで，いずれも数字の列の各数は左から順に大きくなる．

よって，$X=2$ のとき数字の列は，

1 2 □

（□は 3, 4, 5, 6 のいずれか）

となる．

数字の列が「125」となるさいころの目の出方は，② より，4 通りであり，上の他の 3 つの場合も同様に考えて，さいころの目の出方はそれぞれ 4 通りである．

これより，数字の列の字数が 3 で $X=2$ となるさいころの目の出方は，

$$4\times 4=16 \text{（通り）}$$

であるから，数字の列の字数が 3 で $X=2$ となる確率は，

$$\frac{16}{216}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{27}}$$

である．

したがって，$X=2$ となる確率は，

$$\frac{1}{216}+\frac{16}{216}=\frac{17}{216}$$

である．

☜ 数字の列の字数が 2 のときは，$X=0$ であるから，$X=2$ となるのは，字数が 1 の場合と字数が 3 の場合を考えればよい．

(ii) 数字の列の字数が 1 で $X=3$ となるさいころの目の出方は，① と同様にして，

1 通り

である．

☜ $(a, b, c)=(3, 3, 3)$．

数字の列の字数が 3 で $X=3$ となるとき，数字の列は，

「134」，「135」，「136」，「234」，「235」，「236」

の 6 つの場合がある．

このいずれの場合も ② を求めるのと同様に考えて，さいころの目の出方はそれぞれ 4 通りである．

これより，数字の列の字数が 3 で $X=3$ となるさいころの目の出方は，

$$6\times 4=24 \text{（通り）}$$

である．

したがって，$X=3$ となる確率は，

$$\frac{1+24}{216}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{216}}$$

である．

(iii) 数字の列の字数が 1 で $X=1$ となるさいころの目の出方は，① と同様にして，

$$1\text{通り}$$

である．

☜ $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$.

数字の列の字数が 3 で $X=1$ となるような数字の列は存在しない．

☜ 数字の列の字数が 3 となるのは，26 頁右欄の(I)～(IV)のときでいずれも数字の列の各数は，左から順に大きくなるから，中央に書かれている数が 1 となることはない．

したがって，$X=1$ となる確率は，

$$\frac{1}{216}$$

である．

数字の列の字数が 1 で $X=4$ となるさいころの目の出方は，① と同様にして，

$$1\text{通り}$$

である．

☜ $(a,\ b,\ c)=(4,\ 4,\ 4)$.

数字の列の字数が 3 で $X=4$ となるとき，数字の列は，

「145」，「146」，「245」，「246」，「345」，「346」

の 6 つの場合がある．

このいずれの場合も ② を求めるのと同様に考えて，さいころの目の出方はそれぞれ 4 通りである．

これより，数字の列の字数が 3 で $X=4$ となるさいころの目の出方は，

$$6\times4=24\ (\text{通り})$$

である．

したがって，$X=4$ となる確率は，

$$\frac{1+24}{216}=\frac{25}{216}$$

である．

数字の列の字数が 1 で $X=5$ となるさいころの目の出方は，① と同様にして，

$$1\text{通り}$$

である．

☜ $(a,\ b,\ c)=(5,\ 5,\ 5)$.

数字の列の字数が 3 で $X=5$ となるとき，数字の列は，

「156」，「256」，「356」，「456」

の 4 つの場合がある．

このいずれの場合も ② を求めるのと同様に考えて，さいころの目の出方はそれぞれ 4 通りである．

これより，数字の列の字数が 3 で $X=5$ となるさいころの目の出方は，

$$4\times4=16\ (\text{通り})$$

である．

したがって，$X=5$ となる確率は，

$$\frac{1+16}{216}=\frac{17}{216}$$

である．

数字の列の字数が1で $X=6$ となるさいころの目の出方は，① と同様にして，

$$1\text{通り}$$

☜ $(a,\ b,\ c)=(6,\ 6,\ 6)$.

である．

数字の列の字数が3で $X=6$ となるような数字の列は存在しない．

したがって，$X=6$ となる確率は，

$$\frac{1}{216}$$

である．

以上より，X の期待値は，

$$1\times\frac{1}{216}+2\times\frac{17}{216}+3\times\frac{25}{216}+4\times\frac{25}{216}+5\times\frac{17}{216}+6\times\frac{1}{216}$$

$$=\frac{\boxed{301}}{\boxed{216}}$$

である．

☜ **期待値**

試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

であり，それぞれの起こる確率が，

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

$$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，期待値 E は，

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

X の期待値は，$X=0$ となる確率を求めなくても求まる．